

Irena M. Jovanović

Zbirka zadataka za pripremu prijemnog ispita iz matematike na Računarskom fakultetu



Računarski fakultet



CET

Zbirka zadataka za pripremu prijemnog ispita iz matematike na Računarskom fakultetu

dr Irena M. Jovanović, docent

ISBN 978-86-7991-403-3

Copyright © 2017. Računarski fakultet, Beograd i CET, Beograd.

Sva prava zadržana. Nijedan deo ove knjige ne može biti reprodukovan, snimljen, ili emitovan na bilo koji način: elektronski, mehanički, fotokopiranjem, ili drugim vidom, bez pisane dozvole izdavača. Informacije korišćene u ovoj knjizi nisu pod patentnom zaštitom. U pripremi ove knjige učinjeni su svi naponi da se ne pojave greške. Izdavač i autori ne preuzimaju bilo kakvu odgovornost za eventualne greške i omaške, kao ni za njihove posledice.

Recenzenti dr Boško Jovanović, redovni profesor u penziji
 Matematički fakultet u Beogradu
 dr Aleksandra Smiljanić, redovni profesor
 Elektrotehnički fakultet u Beogradu

Tehnički urednik Predrag Buijić

Urednik Dubravka Dragović Šehović

Izdavači **Računarski fakultet**
 Beograd, Knez Mihaila 6/VI
 tel. (011) 2627-613, 2633-321
 www.raf.edu.rs

CET
Computer Equipment and Trade
Beograd, Skadarska 45
tel/fax: (011) 3243-043, 3235-139, 3237-246
www.cet.rs

Za izdavača Dragan Stojanović, direktor

Tiraž 1000

Štampa „Pekograf”, Beograd

Nastavno-naučno veće Računarskog fakulteta na 121. sednici održanoj elektronskim putem od 21. do 22. novembra 2017. godine donelo je odluku da se „Zbirka zadataka za pripremu prijemnog ispita iz matematike na Računarskom fakultetu”, autora Irena M. Jovanović odobri kao pomoćni udžbenik za izvođenje pripremne i drugih vidova nastave na osnovnim akademskim studijama.

Za Miću prepredenjaka :)

Predgovor

Knjiga je prvenstveno namenjena budućim studentima Računarskog fakulteta u Beogradu, kao i budućim brucovima drugih srodnih fakulteta za pripremu prijemnog ispita iz matematike za upis na fakultet.

Naime, zaključno sa školskom 2016/17. godinom, pripremna nastava za polaganje prijemnog ispita iz matematike na Računarskom fakultetu organizovana je u skladu sa materijalom izloženim u [4] (videti spisak literature). Na prijemnom ispitu kandidati su rešavali 20 zadataka odabranih među 405 zadataka iz [4], i svoja rešenja davali zaokruživanjem jednog od pet ponuđenih odgovora. U cilju poboljšanja i unapređenja politike kvaliteta na fakultetu, i na predlog njegovog rukovodstva nastala je ova zbirka zadataka.

Materijal izložen u zbirci u skladu je sa planom i programom gimnazija i tehničkih škola. Sadržaj zbirke je podeljen u trinaest poglavlja. Svako poglavlje, odnosno odgovarajući odeljak sadrži Podsetnik sa kratkim pregledom definicija i teorema potrebnih za rešavanje zadataka. U originalnoj verziji rukopisa, materija u Podsetnicima izložena je u boksevima različitih boja. Ružičasti boksevi sadrže važne definicije i teoreme; u žutim boksevima su manje važne definicije, univerzalne tehnike koje se koriste pri rešavanju zadataka, neke napomene i objašnjenja; dok su u boksevima sive boje teorijski zadaci koji se mogu koristiti pri rešavanju drugih zadataka. Čitaocima se preporučuje da samostalno dokažu rezultate date u sivim boksevima. U štampanom primerku rukopisa moguća su neznatna odsupanja u pogledu boje pomenutih bokseva, kao i kvaliteta ilustrativnih crteža, koji su takođe crtani u kolor formatu.

Zbirka sadrži 873 zadatka, koji po mišljenju autora predstavljaju srž srednjoškolske matematike. Autor je, uz izvesne modifikacije, birao reprezentativne srednjoškolske zadatke, kombinujući ih sa zadacima koji su

prethodnih godina rešavani na prijemnim ispitima za upis na Računarski i srodne fakultete u zemlji, a koji su prilagođeni prvenstveno potrebama studenata Računarskog fakulteta. Skoro svi zadaci su manje ili više detaljno rešeni, a veoma mali broj zadataka je ostavljen čitaocima za samostalan rad.

Autor se zahvaljuje recenzentu prof. dr Aleksandri Smiljanić i kolegici docentu dr. Snježani Majstorović na korisnim sugestijama koje su doprinele konačnom izgledu knjige. Posebnu zahvalnost autor duguje recenzentu prof. dr Bošku Jovanoviću na sugestijama, savetima, podršci i strpljenju koje je, kao i mnogo puta do sada, pokazao odgovarajući na raznorazna pitanja autora.

Prilikom pisanja ove zbirke zadataka namera autora je bila da, pre svega, buduće studente pripremi i olakša im pohađanje i polaganje matematičkih predmeta na osnovnim akademskim studijama na Računarskom fakultetu u Beogradu.

Autor je svestan nedostataka i mogućih grešaka ovog prvog izdanja knjige, te će sa zahvalnošću primiti svaki predlog za korekciju i poboljšanje teksta.

Autor se nada da će zbirka biti od koristi svima kojima je namenjena.

Beograd, oktobra 2017. godine

Autor

Sadržaj

1	Aritmetički, racionalni algebarski i iracionalni izrazi	1
1.1	Podsetnik	1
1.2	Zadaci	8
2	Polinomi jedne promenljive sa realnim koeficijentima	36
2.1	Podsetnik	36
2.2	Zadaci	45
3	Funkcije	65
3.1	Podsetnik	65
3.2	Zadaci	69
3.3	Dodatak A: Grafik funkcije	84
3.4	Dodatak B: Funkcija apsolutna vrednost i funkcija signum	86
4	Linearne jednačine i nejednačine i njihovi sistemi	91
4.1	Linearne jednačine sa jednom nepoznom	91
4.1.1	Podsetnik	91
4.1.2	Zadaci	95
4.2	Sistemi linearnih jednačina	111
4.2.1	Podsetnik	111
4.2.2	Zadaci	122
4.3	Linearne nejednačine i njihovi sistemi	132
4.3.1	Podsetnik	132
4.3.2	Zadaci	137
4.4	Dodatak: Linearne funkcije sa jednom promenljivom	152
5	Kvadratne jednačine i nejednačine. Kvadratne funkcije.	156
	Neke jednačine višeg stepena koje se svode na kvadratne	156
5.1	Kvadratne jednačine	156

5.1.1	Podsetnik	156
5.1.2	Zadaci	160
5.2	Neke jednačine sa jednom nepoznatom koje se svode na kvadratne.	175
5.2.1	Podsetnik	175
5.2.2	Zadaci	178
5.3	Kvadratne funkcije	186
5.3.1	Podsetnik	186
5.3.2	Zadaci	192
5.4	Kvadratne nejednačine	201
6	Iracionalne, eksponencijalne i logaritamske jednačine i nejednačine.	211
6.1	Iracionalne jednačine	211
6.1.1	Podsetnik	211
6.1.2	Zadaci	213
6.2	Iracionalne nejednačine	222
6.2.1	Podsetnik	222
6.2.2	Zadaci	223
6.3	Eksponencijalne jednačine	230
6.3.1	Podsetnik	230
6.3.2	Zadaci	231
6.4	Eksponencijalne nejednačine	241
6.4.1	Podsetnik	241
6.4.2	Zadaci	242
6.5	Svojstva logaritma	245
6.5.1	Podsetnik	245
6.5.2	Zadaci	247
6.6	Logaritamske jednačine	254
6.6.1	Podsetnik	254
6.6.2	Zadaci	255
6.7	Logaritamske nejednačine	264
6.7.1	Podsetnik	264
6.7.2	Zadaci	265
6.8	Dodatak: Primeri nekih iracionalnih, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija	270

7	Trigonometrija	276
7.1	Transformacije trigonometrijskih izraza	276
7.1.1	Podsetnik	276
7.1.2	Zadaci	284
7.2	Inverzne trigonometrijske funkcije	301
7.2.1	Podsetnik	301
7.2.2	Zadaci	305
7.3	Trigonometrijske jednačine	312
7.3.1	Podsetnik	312
7.3.2	Zadaci	316
7.4	Trigonometrijske nejednačine	336
7.4.1	Podsetnik	336
7.4.2	Zadaci	338
7.5	Primena trigonometrije na trougao	345
7.5.1	Podsetnik	345
7.5.2	Zadaci	348
7.6	Dodatak: Osnovne trigonometrijske funkcije	355
8	Kompleksni brojevi	361
8.1	Podsetnik	361
8.2	Zadaci	364
9	Proporcionalnost i procentni račun	375
9.1	Razmere i proporcije	375
9.1.1	Podsetnik	375
9.1.2	Zadaci	378
9.2	Direktna i obrnuta proporcionalnost	380
9.2.1	Podsetnik	380
9.2.2	Zadaci	381
9.3	Račun podele i mešanja	385
9.3.1	Podsetnik	385
9.3.2	Zadaci	386
9.4	Procentni račun	391
9.4.1	Podsetnik	391
9.4.2	Zadaci	392

10 Geometrijske figure u ravni	398
10.1 Podsetnik	398
10.2 Zadaci	424
10.3 Dodatak: Još neki korisni pojmovi iz planimetrije	445
11 Poliedri	451
11.1 Podsetnik o poliedrima	451
11.2 Prizma	454
11.2.1 Podsetnik	454
11.2.2 Zadaci	459
11.3 Piramida i zarubljena piramida	466
11.3.1 Podsetnik	466
11.3.2 Zadaci	472
11.4 Dodatak: Odnos prave i ravni. Diedar. Rogalj.	486
12 Obrtna tela	491
12.1 Podsetnik o obrtnim telima	491
12.2 Valjak	492
12.2.1 Podsetnik	492
12.2.2 Zadaci	496
12.3 Kupa	499
12.3.1 Podsetnik	499
12.3.2 Zadaci	503
12.4 Zarubljena kupa	511
12.4.1 Podsetnik	511
12.4.2 Zadaci	514
12.5 Lopta i njeni delovi	518
12.5.1 Podsetnik	518
12.5.2 Zadaci	523
13 Analitička geometrija u ravni	530
13.1 Tačka. Podela duži u datoj razmeri. Površina trougla.	530
13.1.1 Podsetnik	530
13.1.2 Zadaci	532
13.2 Prava u ravni.	536
13.2.1 Podsetnik	536
13.2.2 Zadaci	539
13.3 Kružnica	549

13.3.1	Podsetnik	549
13.3.2	Zadaci	552
13.4	Elipsa	565
13.4.1	Podsetnik	565
13.4.2	Zadaci	569
13.5	Hiperbola	580
13.5.1	Podsetnik	580
13.5.2	Zadaci	584
13.6	Parabola	593
13.6.1	Podsetnik	593
13.6.2	Zadaci	595
Literatura		601

Pregled slika

3.1	Grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{7x^2 - x^3}$	84
3.2	Grafik funkcije $f(x) = \log_2(1 + x^3)$ i njene inverzne funkcije	85
3.3	Kriva koja nije funkcija	85
3.4	Grafik funkcije $f(x) = x $	87
3.5	Apsolutna vrednost kompleksnog broja z	88
3.6	Signum funkcija	89
4.1	Skup rešenja nejednačine (4.12) za $b > 0$ (i $a > 0$)	138
4.2	Skup rešenja nejednačine (4.12) za $b < 0$ (i $a > 0$)	139
4.3	Skup rešenja nejednačine (4.12) za $b = 0$ i $a > 0$	139
4.4	Skup rešenja nejednačine (4.12) za $b = 0$ i $a < 0$	140
4.5	Skup rešenja nejednačine $ x + 2 > x $	146
4.6	Znak funkcije $\frac{ x -5}{(x +3)(x -1)}$	147
4.7	Grafik funkcije $f(x) = x - 4 + x - 3 $	149
4.8	Grafičko rešenje sistema koga čine sledeće nejednačine: $x + y \geq 0$ i $2x - y \leq 0$	150
4.9	Slika uz zadatak 4.3.22.	151
4.10	Grafik funkcije $y = ax + b$, za $a < 0$	152
4.11	Grafik funkcije $y = ax + b$, za $a > 0$	153
4.12	Grafik funkcije $y = b$, za $b > 0$	154
4.13	Grafik funkcije $y = b$, za $b < 0$	154
4.14	Grafik funkcije $y = ax$, za $a > 0$	155
4.15	Grafik funkcije $y = 0$	155
5.1	Grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ za $a > 0$ i $D > 0$	187

5.2	Grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ za $a > 0$ i $D = 0$	188
5.3	Grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ za $a > 0$ i $D < 0$	188
5.4	Grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ za $a < 0$ i $D > 0$	189
5.5	Grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ za $a < 0$ i $D = 0$	190
5.6	Grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ za $a < 0$ i $D < 0$	190
5.7	Grafik kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 3x - 4$	201
6.1	Grafik funkcije $f(x) = \sqrt{x}$	270
6.2	Grafici nekih funkcija oblika $F(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$	270
6.3	Grafik funkcije $g(x) = \sqrt[3]{x}$	271
6.4	Grafici nekih funkcija oblika $G(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$	271
6.5	Grafik funkcije $h(x) = 2^x$	272
6.6	Grafici nekih funkcija oblika $H(x) = a^x$, za $a > 1$	272
6.7	Grafik funkcije $l(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	273
6.8	Grafici nekih funkcija oblika $L(x) = a^x$, za $0 < a < 1$	273
6.9	Grafik funkcije $r(x) = \log_2 x$	274
6.10	Grafici nekih funkcija oblika $R(x) = \log_a x$, $a > 1$	274
6.11	Grafik funkcije $k(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	275
6.12	Grafici nekih funkcija oblika $K(x) = \log_a x$, gde je $0 < a < 1$	275
7.1	Definicija trigonometrijskih funkcija u pravouglom trouglu	276
7.2	Vrednosti trigonometrijskih funkcija u I kvadrantu	282
7.3	Vrednosti trigonometrijskih funkcija u II kvadrantu	282
7.4	Vrednosti trigonometrijskih funkcija u III kvadrantu	283
7.5	Vrednosti trigonometrijskih funkcija u IV kvadrantu	283
7.6	Funkcija arkus sinus	301
7.7	Funkcija arkus kosinus	302
7.8	Funkcija arkus tangens	302
7.9	Funkcija arkus kotangens	303
7.10	Slika uz zadatak 7.4.1.1)	338

7.11	Slika uz zadatak 7.4.1.2)	338
7.12	Slika uz zadatak 7.4.2.1)	339
7.13	Slika uz zadatak 7.4.2.2)	339
7.14	Slika uz zadatak 7.4.2.3)	340
7.15	Slika uz zadatak 7.4.3.1)	340
7.16	Slika uz zadatak 7.4.3.2)	341
7.17	Slika uz zadatak 7.4.7.	342
7.18	Slika uz zadatak 7.4.8.	343
7.19	Slika uz zadatak 7.4.9.	344
7.20	Slika uz zadatak 7.4.10.	344
7.21	Trougao $\triangle ABC$	345
7.22	Slika uz zadatak 7.5.1.	348
7.23	Slika uz zadatak 7.5.4.	350
7.24	Slika uz zadatak 7.5.15.	354
7.25	Funkcija sinus	356
7.26	Funkcija kosinus	356
7.27	Funkcije sinus i kosinus	356
7.28	Funkcija tangens	359
7.29	Funkcija kotangens	359
7.30	Funkcije tangens i kotangens	359
10.1	Pravilan mnogougao sa unutrašnjim uglom α_i , spo- ljašnjim uglom β_i , centralnim uglom φ , poluprečnikom r upisanog kruga i poluprečnikom R opisanog kruga	401
10.2	Krug opisan oko trougla	402
10.3	Krug upisan u trougao	403
10.4	Težišne duži i težište T trougla	405
10.5	Visine i ortocentar H trougla	405
10.6	Proizvoljan trougao ABC	407
10.7	Proizvoljan četvorougao	409
10.8	Paralelogram sa stranicama a i b i visinama h_a i h_b , koje im, redom, odgovaraju	411
10.9	Romb sa stranicom a i visinom h	412
10.10	Pravougaonik sa stranicama a i b	413
10.11	Kvadrat sa stranicom a	415
10.12	Trapez sa osnovicama a i b , kracima c i d , visinom h , dijagonalama d_1 i d_2 i srednjom linijom m	416

10.13	Jednakokraki trapez	416
10.14	Pravougli trapez	417
10.15	Deltoid	419
10.16	Krug sa centrom u tački O i poluprečnikom r	420
10.17	Centralni α i periferijski β uglovi kruga nad istim lukom l	422
10.18	Kružni isečak i kružni odsečak	423
10.19	Slika uz zadatak 10.2.6	425
10.20	Slika uz zadatak 10.2.11	427
10.21	Slika uz zadatak 10.2.13	428
10.22	Slika uz zadatak 10.2.19	430
10.23	Slika uz zadatak 10.2.21	431
10.24	Slika uz zadatak 10.2.26	432
10.25	Slika uz zadatak 10.2.28	433
10.26	Slika uz zadatak 10.2.30	434
10.27	Slika uz zadatak 10.2.32	435
10.28	Slika uz zadatak 10.2.33	436
10.29	Slika uz zadatak 10.2.34	437
10.30	Slika uz zadatak 10.2.35	437
10.31	Slika uz zadatak 10.2.36	438
10.32	Slika uz zadatak 10.2.37	439
10.33	Slika uz zadatak 10.2.38	439
10.34	Slika uz zadatak 10.2.39	440
10.35	Slika uz zadatak 10.2.48	442
10.36	Slika uz zadatak 10.2.49	443
10.37	Slika uz zadatak 10.2.52	444
10.38	Oсно simetrični četvorouglovi	447
10.39	Centralno simetrični četvorouglovi	447
10.40	Rotacija četvorougla oko tačke O za ugao od 65° , odnosno 35°	448
10.41	Translacija četvorougla za vektor v	448
11.1	Dijagonala i dijagonalna ravan poliedra	453
11.2	Poliedri dobijaju nazive prema broju strana	453
11.3	Kocka	456
11.4	Kvadar	457
11.5	Pravilna trostrana prizma	457

11.6	Pravilna šestostrana prizma	458
11.7	Bočna strana i dijagonalni preseci pravilne šestostrane prizme	458
11.8	Slika uz zadatak 11.2.4	460
11.9	Slika uz zadatak 11.2.6	461
11.10	Slika uz zadatak 11.2.10	463
11.11	Slika uz zadatak 11.2.13	464
11.12	Slika uz zadatak 11.2.15	465
11.13	Pravilna četverostrana piramida	468
11.14	Pravilan tetraedar	469
11.15	Pravilna šestostrana piramida	469
11.16	Slika uz zadatak 11.3.5	473
11.17	Slika uz zadatak 11.3.8	474
11.18	Slika uz zadatak 11.3.11	475
11.19	Slika uz zadatak 11.3.16	477
11.20	Slika uz zadatak 11.3.18	478
11.21	Slika uz zadatak 11.3.26	481
11.22	Slika uz zadatak 11.3.27	482
11.23	Slika uz zadatak 11.3.29	483
11.24	Slika uz zadatak 11.3.30	484
11.25	Prava p normalna na ravni α	486
11.26	Ugao δ između prave p i ravni α	487
11.27	Diedar	488
11.28	Konveksan rogalj	490
11.29	Konkavan rogalj	490
12.1	Prav valjak	493
12.2	Kos valjak	494
12.3	Osnova i omotač pravog valjka	495
12.4	Prava kupa visine H i poluprečnika osnove R	500
12.5	Kosa kupa	501
12.6	Omotač i osnova prave kupe	502
12.7	Slika uz zadatak 12.3.9	505
12.8	Slika uz zadatak 12.3.11	506
12.9	Slika uz zadatak 12.3.15	508
12.10	Slika uz zadatak 12.3.18	509
12.11	Prava zarubljena kupa	511

12.12	Slika uz zadatak 12.4.4	515
12.13	Slika uz zadatak 12.4.7	517
12.14	Sfera	519
12.15	Lopta	520
12.16	Slika uz zadatak 12.5.3	524
12.17	Slika uz zadatak 12.5.11	527
13.1	Slika uz zadatak 13.2.11	542
13.2	Kružnica sa centrom $C(p, q)$ i poluprečnikom r . . .	549
13.3	Slika uz zadatak 13.3.5	553
13.4	Slika uz zadatak 13.3.8	555
13.5	Slika uz zadatak 13.3.9	555
13.6	Slika uz zadatak 13.3.11	556
13.7	Slika uz zadatak 13.3.12	557
13.8	Slika uz zadatak 13.3.14	558
13.9	Slika uz zadatak 13.3.21	561
13.10	Slika uz zadatak 13.3.22	561
13.11	Slika uz zadatak 13.3.23	562
13.12	Slika uz zadatak 13.3.24	563
13.13	Elipsa sa središtem u koordinatnom početku	565
13.14	Slika uz zadatak 13.4.1	569
13.15	Slika uz zadatak 13.4.6	571
13.16	Slika uz zadatak 13.4.9	573
13.17	Slika uz zadatak 13.4.17	576
13.18	Slika uz zadatak 13.4.18	577
13.19	Slika uz zadatak 13.4.19	577
13.20	Slika uz zadatak 13.4.20	578
13.21	Slika uz zadatak 13.4.21	579
13.22	Hiperbola sa središtem u koordinatnom početku . .	580
13.23	Slika uz zadatak 13.5.8	586
13.24	Slika uz zadatak 13.5.9	587
13.25	Slika uz zadatak 13.5.10	588
13.26	Slika uz zadatak 13.5.12	589
13.27	Slika uz zadatak 13.5.15	590
13.28	Parabola $y^2 = 2px$	593
13.29	Parabola $x^2 = 2py$	594
13.30	Slika uz zadatak 13.6.3	596

13.31	Slika uz zadatak 13.6.4	596
13.32	Slika uz zadatak 13.6.9	599
13.33	Slika uz zadatak 13.6.10	600

1 Aritmetički, racionalni algebarski i iracionalni izrazi

1.1 Podsetnik

Algebarski izraz

- ✓ Primenom računskih operacija sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja na konstante (simboli nekih konstanti su: $2, \frac{1}{3}, \dots$) i promenljive (simboli nekih promenljivih su: a, b, x, y, \dots), uz poštovanje pravila o prioritetu računskih operacija, dobijamo (matematički) **izraz**.
- ✓ Za izraz u kome učestvuju samo brojevi kažemo da je **brojevni (aritmetički) izraz**.
- ✓ Za izraz u kome učestvuje bar jedna promenljiva kažemo da je **izraz sa promenljivom**.
- ✓ Izraz u kome su konstante i promenljive međusobno povezane računskim operacijama sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja, stepenovanja i korenovanja^a zovemo **algebarski izraz**.

^aViše detalja o operacijama stepenovanja i korenovanja sledi u nastavku odeljka.

Racionalni algebarski izraz

Racionalni algebarski izraz je izraz u čijem formiranju učestvuju *racionalne algebarske operacije* tj. sabiranje, oduzimanje, množenje (samim tim i stepenovanje) i deljenje. Preciznije, racionalni algebarski izraz je algebarski izraz u kome operacija korenovanja nije primenjena na izraze sa promenljivom.

Definicija racionalnog algebarskog izraza

1. Simboli realnih brojeva $(1, 32, 0, -4, \sqrt{5}, \dots)$ su racionalni algebarski izrazi.
2. Simboli promenljivih $(a, \alpha, b, x, z, \dots)$ su racionalni algebarski izrazi.
3. Ako su A i B racionalni algebarski izrazi, onda su i $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$ i $\frac{A}{B}$ (uz uslov da je $B \neq 0$) racionalni algebarski izrazi.
4. Svi racionalni algebarski izrazi dobijaju se konačnom primenom pravila 1, 2 i 3.

Celi racionalni algebarski izrazi

Izrazi u čijem formiranju ne učestvuje operacija deljenja izrazom koji sadrži promenljive nazivaju se **celi racionalni algebarski izrazi** ili **polinomi**^a.

^aViše detalja o polinomima, čitalac može pronaći u poglavlju *Polinomi jedne promenljive sa realnim koeficijentima*.

Monomi, binomi, trinomi

- ✓ **Monomi** su polinomi koji se sastoje od konstante ili od konstante koja je pomnožena sa jednom ili više promenljivih. Primeri monoma su: 2 , $\frac{1}{5}x$, $4x^3$, $-7xy^2$.
- ✓ **Binomi** su polinomi koji nastaju kao rezultat sabiranja dva monoma. Primeri binoma su: $2 + x$, $x^2 + y^2$.
- ✓ **Trinomi** su polinomi koji nastaju kao rezultat sabiranja tri monoma. Primeri trinoma su: $x^2 + x + 1$, $x^2 - 2xy + y^2$.

Transformacije celih racionalnih algebarskih izraza

Za izraze A , B , C i D važi:

- ✓ **Distributivni zakon:**

$$A(B \pm C) = AB \pm AC;$$

$$(A + B)(C + D) = AC + BC + AD + BD.$$

- ✓ **Razlika kvadrata:** $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

- ✓ **Zbir i razlika kubova:**

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2).$$

- ✓ **Kvadrat zbira/razlike:** $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$.

- ✓ **Kub zbira/razlike^a:**

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3.$$

^aU slučaju kada su A i B monomi, data i prethodna relacija su poznate pod nazivom *kvadrat binoma* i *kub binoma*.

Razlaganje kvadratnog trinoma na činioce

Važi : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, i gde su x_1 i x_2 nule datog polinoma, odnosno rešenja odgovarajuće kvadratne jednačine.^a

^aZa više detalja o nulama polinoma i kvadratnim jednačinama pogledati naredna poglavlja.

Algebarski razlomak

Racionalni algebarski izraz koji se može zapisati u obliku $\frac{A}{B}$, $B \neq 0$, gde su A i B celi racionalni algebarski izrazi, nazivamo **algebarski razlomak**.

Jednakost algebarskih razlomaka

Važi da je $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ako i samo ako je $AD = BC$, $B \neq 0$, $D \neq 0$.

Operacije sa algebarskim razlomcima

- ✓ **Proširivanje razlomaka:** $\frac{A}{B} = \frac{AP}{BP}$, $B \neq 0$, $P \neq 0$.
- ✓ **Skraćivanje razlomaka:** $\frac{AP}{BP} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$, $P \neq 0$.
- ✓ **Množenje razlomaka:** $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, $B \neq 0$, $D \neq 0$.
- ✓ **Deljenje razlomaka:** $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$.
- ✓ **Dvojni razlomak:** $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$.

Operacije sa algebarskim razlomcima

✓ Sabiranje i oduzimanje razlomaka:

$$(a) \frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}, B \neq 0;$$

$$(b) \frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD_1 \pm CB_1}{E}, B \neq 0, D \neq 0, E = NZS(B, D), D_1 = E : B, B_1 = E : D.$$

Stepen čiji je izložilac prirodan broj

n -ti stepen realnog broja a , u oznaci a^n , definišemo sa:

1. $a^1 = a$;
2. $a^{n+1} = a^n \cdot a, n \in \mathbb{N}$,

gde je a **osnova**, a $n \in \mathbb{N}$ **izložilac (eksponent)**.

Neka svojstva stepena čiji je izložilac prirodan broj

- (s.1.) *množenje stepena jednakih osnova*: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
 $m, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$;
- (s.2.) *stepenovanje stepena*: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $m, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$;
- (s.3.) *množenje stepena jednakih izložilaca*: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$,
 $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$;
- (s.4.) *deljenje stepena jednakih osnova*: $a^m : a^n = a^{m-n}$,
 $m, n \in \mathbb{N}, m > n, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$;
- (s.5.) *deljenje stepena jednakih izložilaca*: $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$,
 $m \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Teorema: Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$. Važi: $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$.

Stepen čiji je izložilac ceo broj

Neka je $a \in \mathbb{R}$. Stepenovanje celim brojem definišemo na sledeći način:

1. $a^1 = a$;
2. $a^{m+1} = a^m \cdot a$, $m \in \mathbb{N}$;
3. $a^0 = 1$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Pri definisanju stepena s celobrojnim izložiocem, vodi se računa da se sačuvaju svojstva (s.1.), (s.2.) i (s.3.) stepenovanja prirodnim brojem.

Pojam korena

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{R}$. Simbol $\sqrt[n]{a}$ označava:

- (1) jedinstveno realno rešenje jednačine $x^n = a$, ako je n neparan broj;
- (2) pozitivno rešenje jednačine $x^n = a$, ako je $a > 0$ i n paran broj;
- (3) $\sqrt[n]{0} = 0$.

Stepen čiji je izložilac racionalan broj

Neka je $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Osnovna svojstva operacija sa korenima

1. ako je $a \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

2. ako je $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n - \text{neparno;} \\ |a|, & n - \text{parno.} \end{cases}$$

3. ako je $a, b \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$;

4. ako je $a \geq 0, b > 0$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

5. ako je $a \geq 0$ i $m, n \in \mathbb{N}$, tada je $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;

6. ako je $a \geq 0$ i $m, n \in \mathbb{N}$, tada je $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$;

7. ako je $a \geq 0$ i $m, n \in \mathbb{N}$, tada je $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$;

8. ako je $a, b \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

Racionalizacija imenioca razlomka

U nekim slučajevima, razlomak čiji imenilac sadrži korene može se algebarskim transformacijama svesti na razlomak u čijem imeniocu nema korena. Ovo se čini da bi se izbeglo deljenje iracionalnim brojem, dok se sam postupak kojim se to ostvaruje naziva *racionalizacija imenioca razlomka*. Na primer:

$$(i) \frac{5}{\sqrt{3}+2} = \frac{5}{\sqrt{3}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} = \frac{5\sqrt{3}-10}{3-4} = 10 - 5\sqrt{3};$$

$$(ii) \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2}{(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a-b}.$$

1.2 Zadaci

1.2.1. Rastaviti na činioce¹ sledeće cele racionalne algebarske izraze, odnosno polinome:

1. $21b^2x^2y^3 + 7bx^2y^2 - 14x^3y^2$;
2. $45a^2bx^4 - 30a^3b^3x^3 - 15a^2b^2x^3 + 60a^3x^4$;
3. $\frac{1}{9}x^4y^2 - z^6$;
4. $2xy^3 - 54x^4z^3$.

Rešenje.

1. Imamo: $21b^2x^2y^3 + 7bx^2y^2 - 14x^3y^2 = 7x^2y^2(3b^2y + b - 2x)$.
2. Važi:

$$45a^2bx^4 - 30a^3b^3x^3 - 15a^2b^2x^3 + 60a^3x^4 = \\ 15a^2x^3(3bx - 2ab^3 - b^2 + 4ax).$$

3. Korišćenjem formule za razliku kvadrata, imamo: $\frac{1}{9}x^4y^2 - z^6 = (\frac{1}{3}x^2y)^2 - (z^3)^2 = (\frac{1}{3}x^2y - z^3)(\frac{1}{3}x^2y + z^3)$.
4. Primenom formule za razliku kubova, nalazimo: $2xy^3 - 54x^4z^3 = 2x(y^3 - 27x^3z^3) = 2x(y - 3xz)(y^2 + 3xyz + 9x^2z^2)$.

1.2.2. Rastaviti na činioce polinome:

1. $y(a - x) + x(a - x)$;
2. $15bx - 28c^2 - 12cx + 35bc$;

¹Pod rastavljanjem polinoma na činioce podrazumevamo da polinom treba, primenom transformacija celih racionalnih algebarskih izraza, napisati u obliku proizvoda drugih polinoma. Za više detalja u vezi sa faktorizacijom polinoma, odnosno rastavljanjem polinoma na činioce, pogledati poglavlje *Polinomi jedne promenljive sa realnim koeficijentima*.

3. $(x + y)^2 - (x - y)^2$;
4. $(ax - by)^2 + (bx + ay)^2$;
5. $7a^2(a^3 - b^3) + 4b^2(b^3 - a^3)$.

Rešenje.

1. Ovde je: $y(a - x) + x(a - x) = (a - x)(x + y)$.
2. Imamo: $15bx - 28c^2 - 12cx + 35bc = 3x(5b - 4c) - 7c(4c - 5b) = (5b - 4c)(3x + 7c)$.
3. Primenom formule za razliku kvadrata, dobijamo:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 2x \cdot 2y = 4xy.$$

4. Primenom formule za kvadrat binoma imamo:

$$\begin{aligned} (ax - by)^2 + (bx + ay)^2 &= \\ a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 &= \\ (a^2 + b^2)(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

5. Primenom formula za razliku kubova i razliku kvadrata, nalazimo:

$$\begin{aligned} 7a^2(a^3 - b^3) + 4b^2(b^3 - a^3) &= \\ (a^3 - b^3)(7a^2 - 4b^2) &= \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2)(\sqrt{7}a - 2b)(\sqrt{7}a + 2b). \end{aligned}$$

1.2.3. Rastaviti na činioce:

1. $2bc - b^2 - c^2 + a^2$;
2. $(a + b + 1)^2 - (b + 2)^2$;
3. $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy$;

4. $a^2 + 4b^2 - 4c^2 - d^2 - 4cd - 4ab$;
5. $b(b^3 + a^3) + ab(b^2 - a^2) + a^3(b + a)$.

Rešenje.

1. Imamo: $2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c)$.
2. Primenom formule za razliku kvadrata dobijamo

$$(a + b + 1)^2 - (b + 2)^2 = (a - 1)(a + 2b + 3).$$

3. Ovde je: $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$.
4. Primenom formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata nalazimo da je: $a^2 + 4b^2 - 4c^2 - d^2 - 4cd - 4ab = (a - 2b - 2c - d)(a - 2b + 2c + d)$.
5. Primenom formula za zbir kubova i razliku kvadrata, dati izraz postaje:

$$\begin{aligned} b(b^3 + a^3) + ab(b^2 - a^2) + a^3(b + a) &= \\ (b + a)(b^3 - ab^2 + a^2b + ab^2 - a^2b + a^3) &= \\ (b + a)(a^3 + b^3) &= \\ (a + b)^2(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

1.2.4. Rastaviti na činioce:

1. $(x + y)^3 - 27x^3$;
2. $x^6 - y^6$;
3. $2x^2 + xy - 6y^2$;
4. $9x^2 + 24xy + 16y^2$.

Rešenje.

1. Primenom formule za razliku kubova dobijamo: $(x + y)^3 - 27x^3 = (y - 2x)(13x^2 + 2x + 3xy + y^2)$.

2. Imamo da je:

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= \\ (x^2)^3 - (y^2)^3 &= \\ (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) &= \\ (x - y)(x + y)((x^2 + y^2)^2 - (xy)^2) &= \\ (x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy). \end{aligned}$$

3. Važi da je:

$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - 6y^2 &= 2 \cdot \left[\left(x + \frac{y}{4}\right)^2 - \frac{y^2}{16} - 3y^2 \right] = \\ 2 \cdot \left[\left(x + \frac{y}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}y\right)^2 \right] &= 2 \left(x - \frac{3}{2}y\right) (x + 2y) = \\ (2x - 3y) (x + 2y). \end{aligned}$$

4. Imamo da je: $9x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x + 4y)^2$.

1.2.5. Dokazati identitet: $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$.

Rešenje. Imamo da je:

$$\begin{aligned} (ax + by)^2 - (ay + bx)^2 &= \\ [a(x - y) - b(x - y)] [a(x + y) + b(x + y)] &= \\ (x - y)(a - b)(x + y)(a + b) &= \\ (x^2 - y^2)(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

1.2.6. Rastaviti na činioce:

1. $x^{3n} - 2x^{2n}y^n + x^ny^{2n}$,

2. $x^{3n} + 3x^{2n}y^n + 3x^n y^{2n} + y^{3n}$,

gde je $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje.

1. $x^n (x^n - y^n)^2$,

2. $(x^n + y^n)^3$.

1.2.7. Odrediti vrednosti promenljive x za koje sledeći racionalni izraz ima smisla:

$$F(x) = \frac{x^2 - y^2}{(x - 2)(x + 8)}.$$

Potom izračunati vrednost izraza za $x = 0$ i $x = -3$.

Rešenje. Dati racionalni izraz je definisan za $x \neq 2$ i $x \neq -8$. Dalje je:

$$F(0) = \frac{-y^2}{(-2) \cdot 8} = \left(\frac{y}{4}\right)^2, \text{ odnosno } F(-3) = \frac{9 - y^2}{(-5) \cdot 5} = \frac{(y - 3)(y + 3)}{25}.$$

1.2.8. Koji od sledećih algebarskih razlomaka nema smisla za date vrednosti promenljivih:

(a) $\frac{4a}{a-4b}$, pri $a = -4$ i $b = 2$;

(b) $\frac{3x+2y}{-2x+3y}$, pri $x = 9$ i $y = 6$?

Rešenje.

(a) Algebarski razlomak ima smisla, jer je za navedene vrednosti promenljivih a i b vrednost izraza u imeniocu različita od nule, tj. $a - 4b = -12 \neq 0$.

(b) Algebarski razlomak nema smisla, jer je za navedene vrednosti promenljivih x i y vrednost izraza u imeniocu jednaka nuli.