Mark Huber

VEROVATNOĆA: PREDAVANJA I VEŽBE

Mark Huber

VEROVATNOĆA: PREDAVANJA I VEŽBE

CET

Računarski fakultet

Mark Huber
Verovatnoća: predavanja i vežbe

ISBN 978-86-7991-456-9

Autorizovan prevod sa engleskog jezika knjige ***Probability: Lectures and Labs***

Prevod	Nevena Marić
Gl. i odg. urednik	Jovana Ristić
Tehnički urednik	Vesna Petrinović
Izdavači	**CET Computer Equipment and Trade** Beograd, Skadarska 45 tel/fax: 011 3243-043, 3235-139, 3237-246 http://www.cet.rs
	Računarski fakultet Beograd, Knez Mihaila 6/VI tel. (011) 2627-613, 2633-321 www.raf.edu.rs
Za izdavača	Dragan Stojanović, direktor
Tiraž	Elektronska knjiga

Beograd 2024.

Sadržaj

Predgovor

Svrha Ova knjiga pokriva jednosemestralni kurs verovatnoće za studente koji su imali tradicionalni niz matematičke analize jedne i više promenljivih i kurs linearne algebre. Namenjen je pripremi učenika za napredni rad u verovatnoći. Na primer, studenti koji nameravaju da nastave da pohađaju matematičku statistiku, slučajne procese ili bilo koji drugi napredni kurs verovatnoće.

Struktura kursa je dizajnirana da bude $2/3$ tradicionalnog predavanja i $1/3$ samostalnog učenja, gde studenti završavaju vežbe prvenstveno sami da bi stekli intuiciju o prirodi različitih zakona i koncepata verovatnoće.

Organizacija Prvi deo je najveći deo kursa, koji sadrži glavne ideje, koncepte i teoreme verovatnoće. Deo III okuplja neke dodatne korisne činjenice o verovatnoći i raspodelama i može se integrisati u kurs po potrebi. Deo III sadrži neke osnovne informacije o skupovima, logici, funkcijama, kombinatorici i integraciji, i koje studenti često zaboravljaju pre nego što dođu na kurs matematičke verovatnoće. Konačno, deo IV sadrži rešenja za mnoge zadatke u tekstu, koji se nalaze na kraju svakog poglavlja.

Sažetak U delu I predstavljam sažetak ideja na početku svakog poglavlja. Kada prvi put pročitate ovaj sažetak verovatno neće imati mnogo smisla, ali kada razumete materijal poglavlja, reči i oznake u sažetku bi trebalo da budu potpuno razumljive. Dakle, dobar način da proverite da li razumete poglavlje je da se vratite i ponovo pročitate sažetak.

Moj pristup Kada držim ovaj predmet, ostavljam sve u delu III da ga studenti čitaju po potrebi i odmah počinjem sa predavanjem sa delom I. Ali bez obzira da li počinjete sa prvim ili kasnijim poglavljem, deo III bi trebalo da posluži kao dragocena referenca za studente dok uranjaju u prvi deo.

Kurs kako ga ja predajem ima tri (dvo)časa nedeljno. Predavanja držim ponedeljkom i petkom, a sredom slede vežbe iz dela II, gde studenti generišu slučajne promenljive i proučavaju njihova svojstva. Ove laboratorijske vežbe se implementiraju pomoću R.

Učionica u kojoj predajem ima računar dostupan za svakog studenta, ali većina studenata radije ponese svoj laptop. Vežbe su strukturisane tako da imaju glavni deo praćen proširenim. Studenti koji završe glavne vežbe pre nego što se nastavna sesija završi su obavezni da zatim završe proširene vežbe, pošto vreme potrebno za završetak značajno varira između učenika u zavisnosti od njihovog poznavanja računara.

Formule i definicije

$\boxed{\int_{s\in A} f(s)\, d\# = \sum_{s\in A} f(s)}$

$\boxed{\mathbb{E}[g(X)] = \int_s g(s) f_X(s)\, d\mu}$

$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)}$

$\boxed{f_X(x) = \int_y f_{(X,Y)}(x,y)}$

$\boxed{\mathrm{cdf}_X(a) = F_X(a) = \mathbb{P}(X \le a)}$ $\boxed{\mathbb{V}(A) = \mathbb{E}[A^2] - \mathbb{E}[A]^2}$

$\boxed{f_{A|B=b}(a) \propto f_A(a) f_{B|A=a}(b)}$

$\boxed{\mathrm{mgf}_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]}$

$\boxed{\mathrm{gf}_X(s) = \mathbb{E}(s^X)}$

$$\boxed{\mathrm{Cor}(A,B) = \frac{\mathrm{Cov}(A,B)}{\mathrm{SD}(A)\,\mathrm{SD}(B)}}$$

$\boxed{\mathrm{MAD}(X) = \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]}$

$\boxed{\mathrm{Cov}(A,B) = \mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]}$

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}}$$

$\boxed{\mathbb{P}(X \in A) = \int_{s\in A} f_X(s)\, d\mu}$

Raspodele (podsetnik)

Uniformne slučajne promenljive

X	$f_X(s)$
$\mathsf{Unif}(A)$	$\mathbb{1}(s \in A)/\mu(A)$

Standardne slučajne promenljive

X	$f_X(s)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}(X)$
$\mathsf{Unif}([0,1])$	$\mathbb{1}(s \in [0,1])$	$1/2$	$1/12$
$\mathsf{Exp}(1)$	$\exp(-s)\mathbb{1}(s \geq 0)$	1	1
$\mathsf{N}(0,1)$	$\tau^{-1/2}\exp(-s^2/2)$	0	1
$\mathsf{Cauchy}(0)$	$\frac{2}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2+1}$	ne postoji	ne postoji

Pomeranje i skaliranje standardnih slučajnih promenljivih

X	Iz standardne	$f_X(s)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}(X)$
$\mathsf{Unif}([a,b])$	$(b-a)U + a$	$\mathbb{1}(s \in [a,b])/(b-a)$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathsf{Exp}(\lambda)$	T/λ	$\lambda\exp(-\lambda s)\mathbb{1}(s \geq 0)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$\mathsf{N}(\mu,\sigma^2)$	$\mu + \sigma Z$	$(\sigma^2\tau)^{-1/2}\exp\left(-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ

Još poznatih slučajnih promenljivih

X	$f_X(s)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}(X)$
$\mathsf{Bern}(p)$	$p\mathbb{1}(s=1) + (1-p)\mathbb{1}(s=0)$	p	$p(1-p)$
$\mathsf{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-1}\mathbb{1}(i \in \{0,\ldots,n\})$	np	$np(1-p)$
$\mathsf{Geo}(p)$	$p(1-p)^{i-1}\mathbb{1}(i \in \{1,2,\ldots\})$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\mathsf{NegBin}(r,p)$	$\binom{i-1}{r-1}p^r(1-p)^{i-r}\mathbb{1}(i \in \{1,2,\ldots\})$	r/p	$r(1-p)/p^2$
$\mathsf{Gamma}(n,\lambda)$	$\lambda^n s^{n-i}\exp(-\lambda s)\Gamma(n)^{-1}\mathbb{1}(s \geq 0)$	n/λ	n/λ^2
$\mathsf{Pois}(\mu)$	$\frac{\exp(-\mu)\mu^i}{i!}\mathbb{1}(i \in \{0,1,2,\ldots\}$	μ	μ
$\mathsf{Beta}(a,b)$	$s^{a-1}(1-s)^{b-1}\mathbb{1}(s \in [0,1])$	$a/(a+b)$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

Deo I

Verovatnoća

Glava **1**

Šta je verovatnoća?

Pitanje dana Pretpostavimo da znam da će danas ili padati kiša, ili padati sneg, ili nijedno od toga. Šansa za kišu je 30% a za sneg 15%. Kolika je šansa da ne pada ni jedno ni drugo?

Sažetak Matematika delimičnih informacija naziva se **verovatnoća** i koristi se za izradu proračuna šansi da dođe do određenih ishoda.

Ponekad se sve zna o nekom matematičkom modelu. Na primer, možemo znati da je dužina prostorije tačno 30 fita ili da je pritisak u kontejneru tačno 112 psi. U drugim slučajevima mgli bismo imati samo delimične informacije. Možemo znati da je dužina prostorije negde između 20 i 40 fita ili da je pritisak u kontejneru najviše 120 psi. Tada treba da nađemo način da modelujemo i dužinu i pritisak koji uzima u obzir činjenicu da imamo samo delimične informacije o njihovim pravim vrednostima.

Pogledajmo berzu. Vrednost berze na današnji dan je poznata i to nam daje delimičnu informaciju o tome kakva će vrednost berze biti sutra.

Pošto se sutrašnja berza još nije desila, nemamo potpune informacije i treba nam način da modelujemo nepotpune informacije koje posedujemo.

Drugi način na koji može doći do delimičnih informacija je kada je moguće dobiti ukupne informacije, ali to bi bilo preskupo. Na primer, nema smisla da anketni tim pita svaku osobu u Sjedinjenim Državama koji je njihov preferirani kandidat za predsednika. Umesto toga, ako se mali uzorak iz populacije odabere nasumično i zatim ispita, to daje samo delimične informacije o preferencijama celog biračkog tela.

Takođe može biti da je cilj razumevanje slučajnih fizičkih procesa koji su previše komplikovani da bi imali potpun model. Bacanje novčića, bacanje kockica ili mešanje karata su sve primeri fizičkih procesa koji mogu dovesti do nedostatka informacija. U stvari, ova vrsta slučajnosti je često prva vrsta sa kojom ljudi dolaze u kontakt. Ovo neke ljude navodi na razmišljanje da je slučajnost jednaka fizičkoj slučajnosti. Međutim, to je daleko od istine, a fizički sistemi su samo poseban slučaj shvatanja da slučajnost znači delimične informacije.

Grana matematike koja se bavi delimičnom informacijom zove se *verovatnoća*. Termin potiče od latinske reči *probabilis* što znači moguće i prvi put se pojavio kada se govorilo o neizvesnosti dokaza u sudskim predmetima. Verovatnoće se i danas koriste na sudu, a takođe se koriste za modeliranje, od toga koliko će prijatelja prisustvovati zabavi, pa sve do budućeg stanja planete. Neophodno je biti u stanju da pravilno izračunate imajući samo delimične informacije, i da se pravilno kombinuju izvori neizvesnosti. To je ono čime se ovaj kurs bavi.

Ovde će se duplo podebljano veliko slovo P, $\mathbb{P}$, koristiti da označi verovatnoću odigravanja nekog događaja. Na primer, ako mislim da je verovatnoća da sutra pada kiša 30%, to ću napisati $\mathbb{P}(\text{kiša}) = 0.3$. Drugi termin za verovatnoću je šansa, reč koja dolazi iz latinskog *cadere*, što znači slučajevi.

U pomenutom primeru ima dva slučaja: ili će padati kiša ili neće. Modernim jezikom reći ćemo da su *ishodi* $\{\text{kiša}, \text{nema kiše}\}$. *Prostor* je ime za skup koji je poseban na neki način. Ako ranije niste videli skupove, sada je pravo vreme za to pogledajte Glavu 43. U verovatnoći nazvaćemo skup ishoda koji imaju verovatnoće povezane sa događajima *prostor ishoda*.

Definicija 1
Prostor ishoda je skup mogućih ishoda kada imamo potpune informacije o nečemu. Nekad se naziva i **prostor uzorka** , ili **prostor stanja**.

Notacija 1
Uglavnom se koriste slova Ω (veliko grčko Omega) ili $\mathcal{S}$ za oznaku prostora ishoda.

1.1 Verovatnoća kao mera

U matematici *mera* nam govori veličinu skupa. *Lebegova* mera je jedna od najčešće korišćenih mera. U jednoj dimenziji Lebegova mera je ono što smatramo dužinom. Na primer, Lebegova mera intervala $[3, 7]$ je dužina intervala, ili $7 - 3 = 4$.

U dve dimenzije, Lebegova mera je površina regiona. Lebegova mera jedinične kružnice je površina jediničnog kruga, koja je $(1/2)\tau = \pi$. Ovde $\pi = 3.141\ldots$ je *konstanta polukruga*, dužina polovine kružnice poluprečnika 1, i $\tau = 6,283\ldots$ je *konstanta punog kruga*, dužina cele kružnice poluprečnika 1.

Verovatnoće su takođe mere, ali one mere apstraktniji pojam šanse da se neki događaj desi. Na primer, sa pomenutim primerom, prostor ishoda je $\Omega = \{r, s, n\}$ gde r označava kišu, s označava sneg, a n označava ni jedno ni drugo.

Notacija 2
Prilikom pisanja verovatnoće skupa ishoda veličine 1, uobičajeno je izostaviti vitičaste zagrade oko skupa. Na primer,
$$\mathbb{P}(r) = \mathbb{P}(\{r\}).$$

Pošto je verovatnoća mera, ona deli određena svojstva koja sve mere imaju. Dužina štapa je primer mere i ima sledeća svojstva:

1. Dužina štapa je nenegativna.

2. Ako polomim štap na dva dela, sabiranjem dužina ovih delova dobije se prvobitna dužina štapa.

$$m([0, 10]) = m([0, 3) \cup [3, 10]) = m([0, 3)) + m([3, 10]) = 3 + 7 = 10.$$

Za verovatnoće ove dve ideje se prevode kao

1. Verovatnoća da se neki događaj desi je uvek nenegativna.
2. Ako imamo disjunktna događaja A i B (dakle, $A \cap B = \emptyset$), onda je verovatnoća da se dogodi bar jedan od ovih događaja jednaka zbiru njihovih pojedinačnih verovatnoća.

Ove ideje možemo zapisati i matematički. Za meru m,

1. Za svaki merljivi skup A, $m(A) \geq 0$.
2. Za bilo koja dva merljiva skupa A i B takva da $A \cap B = \emptyset$, važi $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Kada koristim meru brojanja, ako razbijem skup na dva manja skupa koja se ne preklapaju, opet ukupna veličina je zbir veličina manjih skupova.

$$\#(\{a, b, c, d, e\}) = \#(\{a, b\} \cup \{c, d, e\}) = \#(\{a, b\}) + \#(\{c, d, e\}) = 2 + 3 = 5.$$

Za verovatnoće, to znači

$$(\forall A, B : AB = \emptyset)(\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)).$$

U stvari, ovo funkcioniše za bilo koji konačan broj skupova, a ne samo za 2. Skupovi koji se ne preklapaju se pojavljuju dovoljno često da ovom svojstvu damo posebno ime.

Definicija 2
Kažemo da su skupovi A i B **disjunktni** ako je $A \cap B = \emptyset$. Kolekcija skupova $\{A_\alpha\}$ je **disjunktna** ako je svaki par skupova u kolekciji dosjunktan.

1.2 *Ukupna verovatnoća*

Verovatnoće imaju dodatno svojstvo koje nemaju sve mere. Ukupan iznos verovatnoće sa kojim radimo je $100\% = 1$. Rečju, verovatnoća da se nešto desi je 1. Matematički, za prostor ishoda Ω,

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Ovde nema ništa posebno u vezi sa konstantom 1: mogli smo da postavimo na bilo koji pozitivan broj i oko njega izgradimo teoriju verovatnoće. Istorijski gledano, korišćenje 1 kao ukupne verovatnoće matematičarima je izgledalo najprirodnije, pa se 1 danas koristi kao ukupna konstanta verovatnoće.

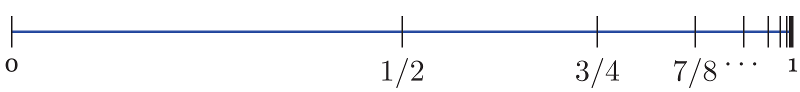
Odgovor na pitanje dana Sa ovim svojstvima sada možemo rešiti pitanje dana:

$$\mathbb{P}(\{r, s, n\}) = \mathbb{P}(\{r\} \cup \{s\} \cup \{n\}) = 30\% + 15\% + \mathbb{P}(\{n\}) = 1,$$

dakle $\mathbb{P}(\{n\}) = 1 - 0.3 - .15 = \boxed{55\%}$.

1.3 *Zenonov paradoks*

Zenon je imao nekoliko paradoksa, ali u najpoznatijem je linija prekinuta na pola, zatim je desna polovina prelomljena na pola, i tako dalje. Ovo lomljenje na pola je urađeno beskonačan broj puta i, i dalje zbir mera komada jednaka je ukupnoj meri kompleta.



$$\begin{aligned} m([0,1]) &= m([0,1/2)) + m([1/2,3/4)) + m([3/4,7/8)) + \cdots \\ 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \end{aligned}$$

Drugim rečima, za meru želimo da se zadrži svojstvo aditivnosti, ne samo za konačnu kolekciju disjunktnih skupova, već čak i za beskonačan niz disjunktnih skupova.

1.4 Formalna definicija verovatnoće

Hajde sada da preciziramo navode u poslednjoj sekciji davanjem formalne definicije verovatnoće.

Definicija 3
Neka $\mathbb{P}$ ima skup ishoda Ω. Ako je $\mathbb{P}(A)$ definisano za $A \subseteq \Omega$, onda kažemo da je A **merljiv**, ili da je **događaj**.

Reći da je A merljivo znači da je definisano $\mathbb{P}(A)$. Onda želimo da se uverimo da je verovatnoća da ishod nije u A takođe definisana. Drugim rečima $\mathbb{P}(A^C)$ gde je A^C komplement od A, takođe treba definisati.

Slično, ako je $A_1, A_2, \ldots$ niz podskupova Ω, i $\mathbb{P}(A_i)$ je definisan za svaki od njih, takođe bismo želeli da verovatnoća da će unija $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ biti definisana. Ovim mislimo na beskonačnu uniju

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a : (\exists i)(a \in A_i)\}.$$

Otuda imamo sledeću definiciju.

Definicija 4
Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija podskupova od Ω takva da je

1. Zatvorena za komplemente: Ako $A \in \mathcal{F}$, onda i $A^C \in \mathcal{F}$.
2. Zatvorena za prebrojive unije: Ako su $A_1, A_2, \ldots$ u $\mathcal{F}$ onda i

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$ se zove **σ-algebra**, a njeni elementi **merljivi skupovi**.

Par napomena:

1. Simbol σ je grčko slovo sigma, dakle termin σ-algebra pročitajte naglas kao „sigma-algebra".
2. Sinonim za σ-algebru je σ-polje.
3. Često nazivamo elemente $\mathcal{F}$ *merljivim skupovima* jer su to skupovi kojima dodeljujemo verovatnoće.
4. Kad god je Ω konačan skup, $\mathcal{F}$ biće skup svih podskupova od Ω.
5. Kada je $\Omega = \mathbb{R}$, σ-algebra $\mathcal{F}$ obično se uzima kao *Borelovi skupovi*. U ovom prvom kursu verovatnoće nećemo precizno definisati Borelove skupove, dovoljno je primetiti da bilo koji interval (otvoren ili zatvoren, konačan ili beskonačan) je element Borelovih skupova.

Primer 1
Ako su $[0,3]$ i $[2,9]$ merljivi skupovi, pokažite da je $[0,9]$ takođe merljiv.

Odgovor. Merljivi skupovi su zatvoreni pod prebrojivim unijama (što uključuje konačne unije). Pa zato što su $[0,3]$ i $[2,9]$ merljivi, onda je merljiv i

$$[0,3] \cup [2,9] = [0,9].$$

Definicija 5
Funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ je **raspodela verovatnoće** ako važi sledeće:

1. Ukupna verovatnoća: $\Omega \in \mathcal{F}$ i $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Prebrojiva aditivnost: Ako su $A_1, A_2, \ldots$ podskupovi od Ω takvi da je za svako $i \neq j$, $A_i A_j = \emptyset$, onda važi

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Napomena: ponekad matematičari to nazivaju aksiomama verovatnoće umesto definicijama.

Primer 2
Neka je $\mathbb{P}(i) = (1/3)^{|i|}$ za $i \in \{1,2,\ldots\} \cup \{-1,-2,\ldots\}$. Naći $\mathbb{P}(\{1,2,3,\ldots\})$?

Odgovor Koristeći naše pravilo za mere verovatnoće

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{1,2,\ldots\}) &= \mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \cdots) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{3-1} = \boxed{0.5000}.
\end{aligned}$$

Imajte na umu da je numerički rezultat u ovom primeru dat na 4 *značajne cifre*, ili skraćeno 4 *sig figs*. Za brojeve kao što je 0.5, verzija sa 4 cifre 0.5000 je identična, ali za brojeve kao što je $\sqrt{2}$, verzija sa 4 cifre 1.414 će biti malo različita. Međutim, relativna greška između dve verzije biće najviše 0.01%, što je dovoljno mala greška da zadovolji većinu potreba u praksi, dok drastično povećava čitljivost. Zbog toga će u ovom tekstu 4 cifre biti standardni način za aproksimaciju numeričkih rezultata.

Zadaci

1.1 Za $A \in \mathcal{F}$ naći $\mathbb{P}(A \cup A^C)$.

1.2 Naći $\mathbb{P}((A \cup B \cup C) \cup (A \cup B \cup C)^C)$.

1.3 Dokazati da ako je prostor ishoda Ω merljiv, onda je merljiv i $\emptyset$.

1.4 Odrediti
$$[0, 1/2) \cup [1/2, 3/4) \cup [3/4, 7/8) \cup \cdots ?$$

1.5 Ako je $[0, 1 - 1/n]$ merljiv za svako $n \geq 2$, pokazati da je interval $[0, 1)$ merljiv.

1.6 Ako je $\{i\}$ merljiv za svaki pozitivan ceo broj i, pokazati da je skup $\{2, 4, 6, \ldots\}$ merljiv.

1.7 *Particija* skupa Ω je kolekcija disjunktnih skupova čija unija je Ω. Neka A, B i C particiraju Ω. Izračunati $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$?

1.8 Pokazati da je za Borelove skupove, skup
$$[0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup \cdots$$
merljiv.

1.9 Pretpostavimo za $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,
$$\mathbb{P}([i, i + 1)) = (1/3)^{i+1}.$$
Naći $\mathbb{P}([0, \infty)$?

1.10 Neke je za $i \in \{1, 2, 3 \ldots\}$, $\mathbb{P}(i) = (1/4)^i$. Naći
$$\mathbb{P}(\{1, 2, 3, \ldots\})?$$

Glava 2

Osobine raspodela verovatnoće

Pitanje dana Dato da je $\mathbb{P}(A_1) = 0.2$, $\mathbb{P}(A_2) = 0.9$ i $\mathbb{P}(A_1 A_2) = 0.15$, koliko je $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$?

Sažetak Iz osnovne definicije možemo izvesti nekoliko svojstava raspodele verovatnoće

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$	Verovatnoća praznog skupa
$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$	Komplementi
$A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$	Monotonost
$\mathbb{P}(A) = 1 \Rightarrow (\forall B)(\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB))$	Sigurni događaji
$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$	Granica unije
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$	Uključivanje-Isključivanje za dva događaja

Ključni objekti verovatnoće su *slučajne promenljive*[1]. Promenljiva uzima određenu vrednost, ali nemamo nikakve informacije o tome koja je ta vrednost. Na primer

$$x \in \mathbb{R},$$

Ovde je x *promenljiva*, $\in$ znači *element od* i $\mathbb{R}$ znači *realni brojevi*. Reći da je x promenljiva realne vrednosti znači da x uzima neku specifičnu vrednost, ali ne znamo ništa o tome koja je to vrednost.

Mogu se dati iskazi o x, ali najbolje što možemo reći o izjavama je da su ili istinite ili lažne. Na primer,

$$\{x \in [10, 30]\} \in \{\text{ISTINA}, \text{LAŽ}\}$$

pošto je izjava: x je element zatvorenog intervala $[10, 30]$ ili istinita izjava, lažna izjava, ali ne može biti oboje. Da bismo ovo pretvorili u brojeve, koristimo *funkciju indikator.* Ova funkcija uzima kao ulaz izraz koji je tačan ili netačan. Vraća 1 ako je unos istinit, i 0 u suprotnom.

[1] *eng. random variable*

Definicija 6
Koristeći T za istinit iskaz i F za lažni iskaz, **indikatorska funkcija** $\mathbb{1} : \{\mathsf{F}, \mathsf{T}\} \to \{0, 1\}$ je definisana kao

$$\mathbb{1}(\mathsf{T}) = 1$$
$$\mathbb{1}(\mathsf{F}) = 0.$$

Koristeći indikator notaciju,

$$\mathbb{1}(x \in [0, 30]) \in \{0, 1\}.$$

Ipak, ovo je sve ili ništa: ili znamo da je izjava tačna i vraćamo 1, ili znamo da je izjava netačna i vraćamo 0.

Pretpostavimo sada da imamo slučajnu promenljivu X koja predstavlja visinu zgrade koju vidimo u daljini. Bez preciznog merenja zgrade, ne znamo sa sigurnošću kolika joj je visina, ali joj možemo pripisati verovatnoću.

$$\mathbb{P}(X \in [10, 30]) \in [0, 1].$$

Verovatnoća koju sada dodeljujemo nije samo 0 ili 1, već bilo koji broj između 0 i 1 koji ukazuje na naš stepen uverenja da je izjava istinita. Za skup A, da bi $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ bila mera verovatnoće (tj. raspodela verovatnoće), neophodno je da zadovoljava neke osobine.

Prošli put smo rekli da je raspodela verovatnoće (mera verovatnoće) funkcija $\mathbb{P}$ koja slika skup događaja $\mathcal{F}$ u $[0, 1]$ i koja ima sledeće dve osobine:

1. Ukupna verovatnoća: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2. Prebrojiva aditivnost: Ako su $A_1, A_2, \ldots$ podskupovi od Ω takvi da za svako $i \neq j$, $A_i A_j = \emptyset$, onda
$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Počnimo sa ove dve činjenice o merama verovatnoće. Postoji mnogo više činjenica o raspodelama, ali matematičari vole da pokušavaju i vide da li mogu da se izvuku sa pretpostavkom samo nekoliko stvari, a zatim dokažu druga svojstva kao njihove logične posledice.

2.1 Komplementi i prazan skup

Prisetimo se da $\emptyset$ označava *prazan skup* gde je za svako x, tvrđenje $x \in \emptyset$ uvek netačno. Šta onda znači $\mathbb{P}(X \in \emptyset) = \mathbb{P}_X(\emptyset)$? Znamo da je $X \in \emptyset$ uvek netačno, tako da bi to trebalo da bude verovatnoće 0, ali to nije jedna od stvari za koje smo pretpostavili da je tačna za meru verovatnoće. Međutim, možemo to izvesti iz definicije raspodele.

Činjenica 1 (Verovatnoća praznog skupa je 0.)
$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Rečju, to znači da je verovatnoća da nema ishoda jednaka 0. Hajde da uradimo dokaz!

Dokaz. Neka je $A_i = \emptyset$ za svako i. Onda su svi A_i međusobno disjunktni i njihova unija je jednaka A_1, tako da

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \cdots .$$

Skraćivanje $\mathbb{P}(A_1)$ sa obe strane nam daje

$$0 = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \cdots \geq \mathbb{P}(A_2) \geq 0,$$

so $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. □

Ova vrsta dokaza je tipična u ovoj vrsti matematike vođene definicijama. To ne doprinosi našoj intuiciji, ono što čini je da potvrdi da nema potrebe da pravimo posebnu pretpostavku da je $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Umesto toga, ova činjenica je logična implikacija naših definicija.

Sada kada je $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ dokazano, može biti korišćeno za dokazivanje drugih tvrđenja. Na primer, u definiciji raspodele, rekli smo da je verovatnoća unije prebrojivog niza merljivih događaja jednaka zbiru njihovih verovatnoća. Šta ako imamo samo konačan niz događaja?

Činjenica 2
Neka su $A_1, \ldots, A_n$ disjunktni i merljivi. Onda

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).$$

Dokaz. Proširimo naš konačni skup događaja $A_1, \ldots, A_n$ na niz, čineći sve ostalo u nizu praznim skupom. To jest, razmotrimo niz

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \emptyset, \emptyset, \ldots.$$

Ceo niz je disjunktan jer je presek bilo kog A_i sa $\emptyset$ jednako $\emptyset$, presek bilo koja dva prazna skupa je prazan, a presek bilo koje dve neidentične A_i je prazan.

Dakle

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) + 0,$$

i time je dokaz završen. □

Ova poslednja činjenica direktno povlači sledeću važnu činjenicu.

Činjenica 3 (verovatnoća komplementa nekog događaja je jedan minus verovatnoća tog događaja.)
Za događaj A
$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Dokaz. Pošto su A i A^C disjunktni

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(A \cup A^C) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Prebacivanjem $\mathbb{P}(A)$ na drugu stranu završava se dokaz. □

Primer 3
Svaki od deset miliona ishoda $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10^7}$ je jednako verovatan. Kolika je šansa da ishod nije ω_1?

Odgovor Možemo reći da je

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}^C) = \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_3) + \cdots + \mathbb{P}(\omega_{10^7}),$$

ili kraće,

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}^C) = 1 - \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 1 - 1/10^7 = \boxed{0.9999999}.$$

Činjenica 4 (Verovatnoće striktno rastu u odnosu na podskupove.)
Neka je $A \subseteq B$ za događaje A i B. Onda

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Dokaz. Neka je $A \subseteq B$. Onda $B = A \cup A^C B$ (rečju, B sadrži one elemente koji su u A ili u B ali ne u A.) Takođe, A i $A^C B \subseteq A^C$ su međusobno disjunktni. Dakle

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C B) \geq \mathbb{P}(A).$$

□

Sledeća činjenica ukazuje da treba da brinemo samo o oblasti koja ima verovatnoću 1.

Činjenica 5
Neka je $\mathbb{P}(A) = 1$. Onda $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.

Dokaz. Primetimo da su $A \cap B$ i $A^C \cap B$ disjunktni i da je njihova unija jednaka B. Onda

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^C \cap B) = \mathbb{P}(B).$$

Takođe, pošto je $A^C \cap B \subseteq A^C$, $\mathbb{P}(A^C \cap B) \leq \mathbb{P}(A^C) = 0$, dakle $\mathbb{P}(A^C \cap B) = 0$ što vodi do željenog rezultata. □

2.2 Granica unije

Sada razmotrimo pronalaženje verovatnoće da se dogodi bar jedan u nizu događaja. U skupovnoj notaciji to znači da tražimo verovatnoću unije događaja.

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \cdots.$$

Pošto događaji mogu da se preklapaju, naše jednostavno pravilo dodavanja ne važi. Da bi skupovi bili disjunktni, razmotrimo prvo uniju dva događaja.

Činjenica 6
Za bilo koje A_1, A_2,

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_1^C A_2.$$

Dokaz. Pošto je $A_1^C A_2 \subseteq A_2$, onda je $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ i $A_1^C A_2 \subseteq A_2$. Dakle

$$A_1 \cup A_1^C A_2 \subseteq A_1 \cup A_2.$$

Za drugi smer, neka je $a \in A_1 \cup A_2$. Onda je a ili u A_1 ili u A_2, ili u oba. Slučaj I: $a \in A_1$, onda $a \in A_1 \cup A_1^C A_2$. Slučaj II: $a \notin A_1$, onda pošto nije u A_1 ni u oba A_1 i A_2, mora biti u A_2. Pošto $a \notin A_1$, onda po definiciji $a \in A_1^C$, dakle $a \in A_1^C A_2$ i $a \in A_1 \cup A_1^C A_2$. □

Štaviše, A_1 i $A_1^C A_2 \subseteq A_1^C$ su disjunktni. Takođe, $A_1^C A_2 \subseteq A_2$. Dakle

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_1^C A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).$$

Ova činjenica o dva skupa može se generalizovati na ono što se naziva *granica unije* ili ponekad *Bonferonijeva nejednakost*.

Činjenica 7 (Granica unije)
Neka je $A_1, A_2, A_3, \ldots$ niz događaja. Tada

$$\mathbb{P}((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \cdots .$$

Dokaz. Neka je $A_1, A_2, \ldots$ niz događaja. Onda

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = A_1 \cup A_1^C A_2 \cup A_1^C A_2^C A_3 \cup \cdots ,$$

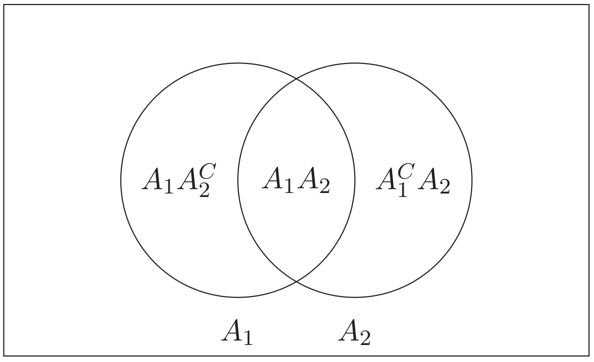
gde je svaki događaj na desnoj strani disjunktan sa ostalim. Dakle

$$\mathbb{P}((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_1^C A_2) + \mathbb{P}(A_1^C A_2^C A_3) + \cdots \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots .$$

□

2.3 *Uključivanje/isključivanje*

Dok granica unije može dati gornju granicu verovatnoće, ona neće uvek dati preciznu verovatnoću. Da bismo to postigli, prvo pogledajmo uniju dva događaja. Razmotrimo Venov dijagram dva događaja.



Primetimo da je

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= A_1 A_2^C \cup A_1 A_2 \cup A_1 A_2^C \\ A_1 &= A_1 A_2 \cup A_1 A_2^C \\ A_2 &= A_1 A_2 \cup A_1^C A_2. \end{aligned}$$

Ovde nećemo prolaziti kroz formalni dokaz, jer je sličan prethodnima. Korišćenje ovog razbijanja $A_1 \cup A_2$ znači da je $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 A_2) + \mathbb{P}(A_1 A_2^2)$, ili pregrupisavanjem:

$$\mathbb{P}(A_1 A_2^C) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 A_2).$$

Slično tome,

$$\mathbb{P}(A_1^C A_2) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_2).$$

Ovo nam omogućava da nađemo tačnu verovatnoću unije dva događaja.

Činjenica 8 (Uključivanje/isključivanje za dva događaja.)
Za bilo koja dva događaja A_1 i A_2,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_2).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}(A_1 A_2^C) + \mathbb{P}(A_1 A_2) + \mathbb{P}(A_1 A_2^C) \\
&= \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 A_2) + \mathbb{P}(A_1 A_2) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_2).
\end{aligned}$$

□

Ovo se zove *uključivanje/isključivanje* zato što uključujemo A_1 i A_2, a onda isključujemo $A_1 A_2$ oduzimajući njegovu verovatnoću.

Štaviše, ovo možemo proširiti na uniju bilo kog konačnog broja događaja. Ono što se dešava je da se preseci neparnog broja događaja dodaju, dok se preseci parnog broja događaja oduzimaju.

Činjenica 9 (Princip uključivanja/isključivanja)
Za skupove $A_1, \ldots, A_n$, neka je $[n] = \{1, 2, 3 \ldots, n\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = &\sum_{i \in [n],\ \text{neparan}} \ \sum_{\{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \subseteq [n]} \mathbb{P}(A_{a_1} A_{a_2} \cdots A_{a_i}) - \\
&\sum_{i \in [n],\ \text{paran}} \ \sum_{\{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \subseteq [n]} \mathbb{P}(A_{a_1} A_{a_2} \cdots A_{a_i})
\end{aligned}$$

Tako, za tri skupa važi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = &\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_3) - \mathbb{P}(A_2 A_3) + \\
&\mathbb{P}(A_1 A_2 A_3).
\end{aligned}$$

Zadaci

2.1 Neka su A i B disjunktni događaji takvi da je $\mathbb{P}(A) = 0.1$ i $\mathbb{P}(B) = 0.7$. Izračunati $\mathbb{P}(A \cup B)$.

2.2 Neka su A_1, A_2 i A_3 disjunktni događaji, takvi da je $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 0.3$.

a) Izračunati $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

b) Izračunati $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$.

2.3 Neka je $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.8$ i $\mathbb{P}(AB) = 0.3$. Izračunati $\mathbb{P}(A \cup B)$.

2.4 Neka je $\mathbb{P}(A) = 0.7$ i $\mathbb{P}(B) = 0.4$. Da li je moguće da su A i B disjunktni? Ako da, dajte neki primer, u suprotnom pokažite da nije moguće.

2.5 Ako je $\mathbb{P}([0,3]) = 0.3$ i $\mathbb{P}([5,9]) = 0.6$, koliko je $\mathbb{P}([0,3] \cup [5,9])$?

2.6 Ako je $\mathbb{P}(\{a,b,c\}) = 0.2$ i $\mathbb{P}(\{d,e\}) = 0.4$, koliko je $\mathbb{P}(\{a,b,c,d,e\}$?

2.7 Neka je $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 0.2$. Oceniti odozgo $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

2.8 Ako je $\mathbb{P}(A_i) \leq (1/3)^i$ za $i \in \{1,2,3,\ldots\}$, odrediti jednu gornju granicu za

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots).$$

2.9 Pretpostavimo da je poštena kockica, sa stranama obeleženim $\{1,2,\ldots,6\}$, bačena tri puta. Postoji mnogo mogućih ishoda, npr. $(2,3,3)$ je jedan mogući ishod.

a) Koliko je mogućih ishoda?

b) Ako je svaki ishod podjednako verovatan, kolika mora biti verovatnoća svakog ishoda?

c) Kolika je šansa da dobijete sve šestice na tri bacanja?

d) Kolika je šansa da ne dobijete sve šestice na tri bacanja?

2.10 Robna kuća modelira svaku osobu koja ulazi u radnju kao osobu koja ne troši, srednje troši ili mnogo troši. Ako je verovatnoća da osoba ne troši 0.15, a da srednje troši 0.4, koja je verovatnoća da je to osoba koja mnogo troši?

2.11 $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.3$. Koliko je $\mathbb{P}(A^C B^C)$?

2.12 Neka je $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5$. Koliko je $\mathbb{P}(A^C B^C)$?

2.13 Neka je $\mathbb{P}(A \in [0,3]) = 1$, $\mathbb{P}(A \in [1,2]) = 0.3$ i $\mathbb{P}(A \in [2,3]) = 0.6$. Izračunati $\mathbb{P}(A \in [2,5])$.

Glava 3

Diskretne slučajne promenljive

Pitanje dana Dve šestostrane kockice se bacaju nezavisno jedna od druge. Koja je verovatnoća da je zbir dobijenih brojeva jednak 5?

Sažetak **Slučajne promenljive** kao što je X predstavljaju vrednosti koje nisu potpuno nepoznate, tako da postoje neke delimične informacije. **Raspodela** od X je mera verovatnoće $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$. Kada se za slučajnu promenljivu zna da leži u prebrojivom skupu, sa verovatnoćom 1, onda ćemo je zvati **diskretnom**. Slučajne promenljive X koje su **uniformno raspodeljene** na konačnom skupu A (pišemo $X \sim \mathsf{Unif}(A)$) podjednako verovatno uzimaju bilo koju vrednost iz A. Reći ćemo $(X, Y) \sim \mathsf{Unif}(A \times B)$ ako i samo ako $X \sim \mathsf{Unif}(A)$, $Y \sim \mathsf{Unif}(B)$ gde su X i Y **nezavisne**.

3.1 Promenljive i slučajne promenljive

Ako vam kažem da je $x_1 = 3$ i $x_2 = 2$, onda je $x_1 + x_2 = 5$. Mi obično zovemo x_1 i x_2 *promenljivim* i naučili ste tokom godina mnoga pravila za rad sa promenljivama. Ali sada razmislite šta se dešava kada x_1 i x_2 nisu u potpunosti poznati. Pretpostavimo da mi ipak znamo nešto o njima, naime, da su oni ishodi od bacanja poštene šestostrane kocke, ali da ne znamo ništa više od toga.

Tada obično koristimo velika slova da označimo naše vrednosti. Na primer, mogli bismo da koristimo X_1 i X_2 za bacanje kockica.

Dakle, sada pitanje dana glasi: Koja je šansa da $X_1 + X_2 = 5$? Zato što imamo samo delimične informacije o X_1 i X_2, kažemo da su *slučajne promenljive*.

Na primer, znamo da je X_1 1, 2, 3, 4, 5 ili 6. Matematički, koristimo *skupovnu notaciju* i pišemo

$$X_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Vitičaste zagrade $\{$ i $\}$ označavaju da je ovo skup. U skupu, redosled nije bitan, tako da $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$. Često koristimo tri tačke $\ldots$ da naznačimo da čitalac treba mentalno da dovrši među sadržaj , dakle

$$\{1, \ldots, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

3.2 Uniformna raspodela

Sada razmotrite pitanje dana. Za ovaj zadatak imamo dve kockice. Svaka kockica je poštena šestostrana kocka.To znači da ako X_1 predstavlja prvo bacanje kocke, i X_2 drugo, onda su i X_1 i X_2 elementi skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Koristimo reč *pošteno* da ukažemo na to da u početku nemamo znanja o stanju svake kocke. Odnosno, svaka od mogućnosti je jednako verovatna. Ovo je situacija kada imate najmanju količinu informacija o vrednosti slučajne promenljive.

Da budemo precizniji o tome šta podrazumevamo pod poštenjem, možemo govoriti o raspodeli slučajne promenljive.

Intuicija 1
Za slučajnu promenljivu X, funkcija $\mathbb{P}_X$ definisana kao

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

naziva se **raspodela** od X.

To znači da je distribucija funkcija. Sada, realne funkcije koje se mnogo koriste imaju posebna imena, kao što su eksponencijalna funkcija ili sinusna funkcija. Na isti način dajemo imena posebnim raspodelama koje često koristimo.

Na primer, za X pošteno bacanje šestostrane kocke,

$$\mathbb{P}_X(\{1, 3, 5\}) = \mathbb{P}(X \in \{1, 3, 5\}) = 3/6 = 1/2.$$

Primetimo da za jedan ishod,

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}_X(\{2\}) = \cdots = \mathbb{P}_X(\{6\}) = 1/6.$$

Drugim rečima postoji jedinstvena verovatnoća da je X jednako svakom od mogućih ishoda. Latinski prefiks za jedan je *uni*, što je razlog zašto se npr. unilateralnima zovu oni koji imaju samo jednu stranu. Pošto svaki ishod ima jednu istu verovatnoću, ovu raspodelu nazivamo *uniformnom*. Formalno se može definisati na sledeći način.

Definicija 7
Neka je B skup, takav da $\#(B) > 0$ i $\#(B) < \infty$. Onda je X **uniformna nad B**, što pišemo $X \sim \mathsf{Unif}(B)$, ako je za svaki merljiv $A \subseteq B$,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\#(A)}{\#(B)}.$$

Primetimo da u konkretnom sličaju, ako je $A = \{a\}$, onda $\#(A) = 1$, i

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X = a) = 1/\#(B).$$

Teoretski, ta definicija zahteva da proverimo verovatnoću za sve skupove $A \subseteq B$. Postoji mnogo takvih skupova, tako da je od pomoći da primetimo da zapravo moramo da proverimo samo za skupove veličine 1!

Činjenica 10
Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X = b) = 1/\#(B)$ za svako $b \in B$. Tada $X \sim \mathsf{Unif}(B)$.

Dokaz. Neka je $A \subseteq B$. Onda

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(\cup_{a\in A}\{a\}\right) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(X \in \{a\}) = \sum_{a\in A} \frac{1}{\#(B)} = \frac{\#(A)}{\#(B)},$$

tako da $X \sim \mathsf{Unif}(B)$. $\square$

Primer 4
Pretpostavimo da $Y \sim \mathsf{Unif}(\{1,\dots,10\})$. Koja je verovatnoća da je $Y \in \{3,4,5\}$?
Odgovor je $\#(\{3,4,5\})/\#(\{1,\dots,10\}) = 3/10 = \boxed{0.3000}$.

3.3 Nezavisne unifromne slučajne promenljive

Kažemo da su dve slučajne promenljive *nezavisne* ako poznavanje vrednosti jedne slučajne promenljive nam ne daje nikakve informacije o drugoj. U pitanju dana, poznavanje X_1 nam ne govori bilo šta o X_2. Matematički nezavisnost se može definisati na sledeći način.

Definicija 8
Događaji A i B su **nezavisni** ako

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Slučajne promenljive X i Y su **nezavisne** ako za sve C i D, događaji $X \in C$ i $Y \in D$ su nezavisni.

Definicija 9
Slučajne promenljive X i Y su **nezavisne** ako za sve merljive A i B,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Primer 5
Neka su $X \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3\})$ i $Y \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4\})$ nezavisne Naći

$$\mathbb{P}(X = 1, Y \in \{2,3\}).$$

Odgovor Pošto su X i Y nezavisne,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1, Y \in \{2,3\}) &= \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y \in \{2,3\}) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{6} = 0.1666\dots\end{aligned}$$

Za uniformne slučajne promenljive, nezavisnost nam daje sledeće.

Činjenica 11
Važi da je $(X,Y) \sim \mathsf{Unif}(\Omega_X \times \Omega_Y)$ ako i samo ako $X \sim \mathsf{Unif}(A)$, $Y \sim \mathsf{Unif}(B)$, i X i Y su nezavisne slučajne promenljive.

Notacija: prisetimo se da $A \times B$ (čita se A puta B) označava dvodimenzioni set tačaka (a, b) takvih da je $a \in A$ i $b \in B$.

Dokaz. Neka je $(a, b) \in A \times B$, tj. $a \in A$ and $b \in B$. Tada, zbog nezavisnosti X i Y imamo

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b) = \frac{1}{\#(A)} \cdot \frac{1}{\#(B)} = \frac{1}{\#(A \times B)}.$$

Dakle $(X, Y) \sim \mathsf{Unif}(A \times B)$. □

U pitanju dana, $X_1 \in \{1, \ldots, 6\}$ i $X_2 \in \{1, \ldots, 6\}$. Pošto su obe uniformne i nezavisne,

$$(X_1, X_2) \sim \mathsf{Unif}(\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}).$$

Ima 36 elemenata u $\{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\}$, i za tačno 4 od njih

$$(1, 4)(2, 3), (3, 2), (4, 1)$$

važi $X_1 + X_2 = 5$. Dakle

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 5) = \mathbb{P}((X_1, X_2) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} = \frac{4}{36} \approx \boxed{0.1111}.$$

3.4 Šta čini slučajnu promenljivu diskretnom

Primer *diskretne slučajne promenljive* je slučajna promenljiva koja je uniformna na konačnom skupu. Šta ga čini diskretnim? U matematici, diskretno se odnosi na skupove koji su *konačni* ili *prebrojivo beskonačni*.

Definicija 10
Skup A je **konačan** ako postoji $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ i surjekcija $f : \{1, \ldots, n\} \to A$.

Dakle, skup je konačan ako možemo da prebrojimo elemente A koristeći brojeve $\{1, \ldots, n\}$ za neko n. Na primer, za skup $\{a, b, c\}$, mogu dodeliti elementu a broj 1, elementu b broj 2, a c broj 3. Pošto je 3 pozitivan ceo broj, skup je konačan.

Definicija 11
Skup A je **prebrojivo beskonačan** (ili **diskretan**) ako postoji surjekcija $f : \{1, 2, 3, \ldots\} \to A$.

Definicija 12
Slučajna promenljiva je **diskretna** ako postoji diskretan set Ω takav da $\mathbb{P}(X \in \Omega) = 1$.

Primer 6
Neka je $\mathbb{P}(X = i) = (1/2)^i$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Dokazati da je X diskretna.

Odgovor Prema osobini prebrojive aditivnosti,

$$\mathbb{P}(X \in \{1, 2, 3, \ldots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1,$$

tako da X pada u prebrojivo beskonačan skup sa verovatnoćom 1, dakle, diskretna je.

Zadaci

3.1 Neka je $U \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4,5,6\})$. Koliko je $\mathbb{P}(U \leq 4)$?

3.2 Neka je X unifomna nad pozitivnim parnim brojevima do 100. Kolika je verovatnoća da je X deljivo sa 4?

3.3 Neka je $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{d,e\}$. Odredi $A \times B$.

3.4 Naći $\{1,2,3\} \times \{2,3,4\}$.

3.5 Neka je $W \sim \mathsf{Unif}(\{a,b,c,d\})$. Naći $\mathbb{P}(W \in \{a,c\})$.

3.6 Neka je $W \sim \mathsf{Unif}(\{a,b\} \times \{c,d\})$. Naći $\mathbb{P}(W = (a,c))$.

3.7 Neka su $X_1 \sim \mathsf{Unif}(\{1,\ldots,6\})$ i $X_2 \sim \mathsf{Unif}(\{1,\ldots,6\})$ nezavisne. Koliko je onda $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 6)$?

3.8 Neka je (X,Y) uniformno raspodeljena nad $\{1,2,3\} \times \{1,2\}$. Koja je verovatnoća da je $X = Y = 2$?

3.9 Pretpostavimo da bacam 3 poštene šestostrane kockice tako da je svaki ishod jednako verovatan i nazovimo ishod (X_1, X_2, X_3). Neka je S najmanji od dobijenih brojeva. Za $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, naći $\mathbb{P}(S = i)$.

3.10 Pretpostavimo da se bacaju tri desetostrane poštene kockice gde je svaka strana obeležena jednim od brojeva $\{0,1,2,\ldots,9\}$. Koja je verovatnoća da dobijemo $(0,0,7)$?

3.11 Dokazati da je $\{2,3,4,5,\ldots\}$ diskretan skup.

3.12 Neka je za $i \in \{1,2,3,\ldots\}$, $\mathbb{P}(X = i) = (1/3)(2/3)^{i-1}$. Dokazati da je X diskretna slučajna promenljiva.

Glava 4

Neprekidne slučajne promenljive

Pitanje dana Neka su U_1 i U_2 nezavisne i uniformne nad $[0,1]$. Koja je verovatnoća da je $U_1 \leq U_2^2$?

Sažetak **Uniformna slučajna promenljiva** X nad skupom B nenulte konačne mere ima $\mathbb{P}(X \in A) = m(A)/m(B)$ za sve merljive $A \subset B$. **Neprekidne slučajne promenljive** imaju $\mathbb{P}(X = a) = 0$ za sve $a \in \mathbb{R}$. Uniformne slučajne promenljive nad neprekidnim skupom su neprekidne slučajne promenljive.

4.1 Neprekidne uniformne slučajne promenljive

Podsetimo se da za diskretne slučajne promenljive, i $A \subset B$, ako $X \sim \mathsf{Unif}(B)$, onda

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\#(A)}{\#(B)}.$$

Tako da za $X \in \{a, b, c, d, e\}$,

$$\mathbb{P}(X \in \{b, c\}) = \frac{2}{5} = 0.4000.$$

Ovo funkcioniše jer $\#(B) > 0$ i $\#(B) < \infty$ tako da nema problema sa imeniocem.

Za neprekidnu uniformnu slučajnu promenljivu, umesto mere brojanja, koristimo Lebegovu meru.

Definicija 13
Sa m označimo Lebegovu meru, i pretpostavimo da je B takav skup da $m(B) \in (0, \infty)$. Reći ćemo da je X **uniformna nad B** ako za svako merljivo $A \subseteq B$,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{m(A)}{m(B)}.$$

Napomena: Ova definicija daje raspodelu verovatnoće za bilo koju meru gde je $m(B)$ pozitivan konačni broj, a ne samo za meru prebrojavanja i Lebegovu! Međutim, to su obično jedine dve mere za koje se dobijena raspodela naziva uniformnom.

Primer 7
Neka je $Y \sim \mathsf{Unif}([2,8])$. Kolika je $\mathbb{P}(Y \in [3,4])$?

Answer Pošto $[3,4] \subseteq [2,8]$,

$$\mathbb{P}(Y \in [3,4]) = \frac{m([3,4])}{m([2,8])} = \frac{4-3}{8-2} = \frac{1}{6} \approx \boxed{0.1666}.$$

Za promenljive uniformne nad B, šansa da uzmu vrednosti van skupa B je 0. Formalno, imamo sledeće

Činjenica 12
Za $X \sim \mathsf{Unif}(B)$, ako $CB = \emptyset$, onda $\mathbb{P}(X \in C) = 0$.

Dokaz. Neka je C takav da je $CB = \emptyset$. Onda su CB i B disjunktni, i

$$\mathbb{P}(X \in CB \cup B) = \mathbb{P}(X \in CB) + \mathbb{P}(X \in B).$$

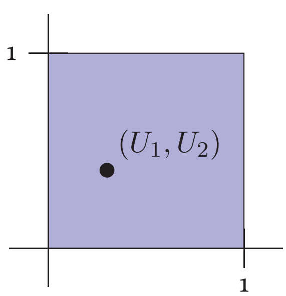
Ali $\mathbb{P}(X \in B) = 1$ i $\mathbb{P}(X \in CB \cup B) \leq 1$. Dakle $\mathbb{P}(X \in CB) = 0$. □

Primer 8
Neka je $Y \sim \mathsf{Unif}([2,8])$. Kolika je $\mathbb{P}(Y \in [0,4])$?
Pošto je $[0,4] = [0,2) \cup [2,4]$ i $[2,4] \subseteq [2,8]$,

$$\mathbb{P}(Y \in [0,4]) = \mathbb{P}(Y \in [0,2)) + \mathbb{P}(Y \in [2,4]) = 0 + \frac{4-2}{8-2} = \frac{2}{6} \approx \boxed{0.3333}.$$

4.2 Nezavisne slučajne promenljive

Sada da razmotrimo dve dimenzije. Pretpostavljam da $(U_1, U_2) \sim \mathsf{Unif}([0,1] \times [0,1])$ tako da biramo tačku uniformno iz jediničnog kvadrata.



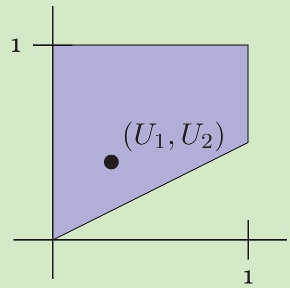
Ista definicija se odnosi na dve, tri ili veći broj dimenzija.

Primer 9
Koja je šansa da je $U_1 \geq 2U_2$?

Ako je U_1 na horizontalnoj osi a U_2 na vertikalnoj, onda želimo da

$$U_2 \geq (1/2)U_1,$$

i onda oblast gde je $U_2 \geq (1/2)U_1$ izgleda ovako:



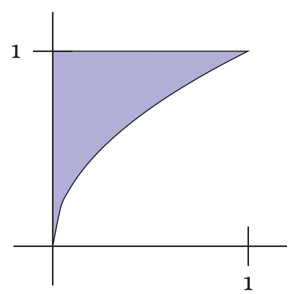
Ovo je trapezoid površine

$$\int_{u_1=0}^{1} 1 - (1/2)u_1 \, du_1 = u_1 - u_1^2/4|_0^1 = 3/4 = \boxed{0.7500}.$$

Isto pravilo (Činjenica 11) za nezavisne uniformne slučajne promenljive koje je važilo u diskretnom slučaju, važi i u neprekidnom. To jest,

$$(X, Y) \sim \mathsf{Unif}(A \times B) \Leftrightarrow X \sim \mathsf{Unif}(A), Y \sim \mathsf{Unif}(B), X \text{ and } Y \text{ su nezavisne.}$$

Pitanje dana Ovde su $U_1 \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ i $U_2 \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ nezavisne, tako da $(U_1, U_2) \sim \mathsf{Unif}([0,1] \times [0,1])$. Da bi našli $\mathbb{P}(U_1 \leq U_2^2)$, treba da skiciramo tu oblast u U_1, U_2 prostoru.



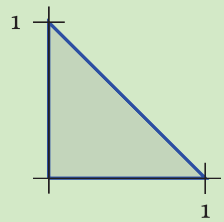
Da nađemo površinu:

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y^2} 1 \, dx \, dy = \int_{y=0}^{1} y^2 \, dy = y^3/3|_0^1 = 1/3 \approx \boxed{0.3333}.$$

Primer 10

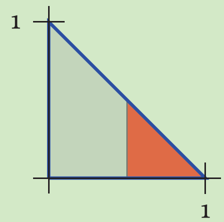
Neka $(U_1, U_2) \sim \text{Unif}(A)$, gde je A trougaona oblast sa temenima $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$. Dokažimo da U_1 i U_2 nisu nezavisne.

Odgovor Razmotrimo događaje $U_1 > 0.5$ i $U_2 > 0.5$. Ako su oba ova događaja istinita onda, $U_1 + U_2 > 1$, što je van oblasti A:



Dakle $\mathbb{P}(U_1 > 0.5, U_2 > 0.5) = 0$.

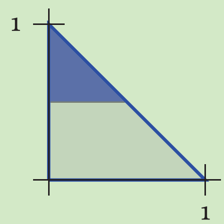
Sada razmotrimo $\mathbb{P}(U_1 > 0.5)$. Ovo je osenčena oblast trougla.



Osenčena oblast ima površinu $(1/2)(1/2)(1/2) = 1/8$, a ukupna površina trougla je $(1/2)(1)(1) = 1/2$, tako da verovatnoća da uniformna upadne u osenčenu oblast iznosi

$$\mathbb{P}(U_1 > 0.5) = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}.$$

Slično, verovatnoća da $U_2 > 0.5$ je verovatnoća da uniformna upadne u plavo-osenčenu oblast.



Ovo je takođe $1/4$. Dakle

$$\mathbb{P}(U_1 > 0.5)\mathbb{P}(U_2 > 0.5) = (1/4)(1/4) = 1/16,$$

što nije $\mathbb{P}(U_1 > 0.5, U_2 > 0.5) = 0$. Dakle, U_1 i U_2 nisu nezavisne.

4.3 Šta slučajnu promenljivu čini neprekidnom

Pretpostavimo da $X \sim \text{Unif}([0,1])$. Onda

$$\mathbb{P}(X = 0.3) = \mathbb{P}(X \in [0.3, 0.3]) = \frac{0.3 - 0.3}{1 - 0} = 0.$$

U stvari, za bilo koju pojedinačnu tačku x u $[0,1]$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$. Ispostavlja se da je to način na koji definišemo neprekidnu slučajnu promenljivu.

Definicija 14
Reći ćemo da je X **neprekidna slučajna promenljiva** ako za svako x, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Primer 11
Pokazati da za $U \sim \text{Unif}([0,1])$, U^2 je neprekidna slučajna promenljiva.

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo $x \neq 0$. Onda

$$\mathbb{P}(U^2 = x) = \mathbb{P}(U = \sqrt{x}) + \mathbb{P}(U = -\sqrt{x}) = 0 + 0 = 0$$

Sada pretpostavimo $x = 0$. Onda $\mathbb{P}(U^2 = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = 0$. Dakle U^2 je neprekidna.

Iz poslednjeg primera možda ćete biti u iskušenju da mislite da bilo koja funkcija neprekidne slučajne promenljive je takođe neprekidna slučajna promenljiva. Ali, to nije istina!

Neka je $f(x) = 1$ za $x \in [0, 0.5]$, i $f(x) = 2$ za $x \in (0.5, 1]$. Tada za $U \sim \text{Unif}([0,1])$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(f(U) = 1) &= \mathbb{P}(U \in [0, 0.5]) = 0.5\\ \mathbb{P}(f(U) = 2) &= \mathbb{P}(U \in (0.5, 1]) = 1 - 0.5 = 0.5\end{aligned}$$

Dakle, $f(U) \sim \text{Unif}(\{1,2\})$ je diskretna slučajna promenlljiva.

4.4 Konstruisanje neprekidne uniformne slučajne promenljive

Dakle, rekli smo šta je neprekidna uniformna slučajna promenljiva, ali kako možemo napraviti takvu promenljivu od diskretnih uniformnih? Na sledeći način.

Neka je $X_i \sim \text{Unif}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$, i za svako n, $\{X_1, \ldots, X_n\}$ su nezavisne slučajne promenljive. Tada zovemo

$$X_1, X_2, \ldots$$

niz nezavisnih, jednako raspodeljenih (*independent, identically distributed*) slučajnih promenljivih ili *iid*.

Imajući dat ovaj niz, tretiramo ga kao niz realnih brojeva u intervalu $[0,1]$. Formalno

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} X_i / 10^i.$$

Tako da, na primer, ako je

$$X_1 = 6, X_2 = 0, X_3 = 4, X_4 = 7,$$

onda

$$U = 0.6047\ldots$$

Ispostavilo se (uz priličnu količinu rada) da se može dokazati da slučajna promenljiva U generisana na ovaj način je u stvari uniformna na intervalu $[0, 1]$

Postoji i drugi, više geometrijski, način razmišljanja o ovome. Počnimo sa intervalom $[0, 1]$. Zatim bacimo pošteni novčić, čije su strane označeno ili D za desno ili L za levo. Onda ako je novčić pao na levo, posmatramo levu polovinu intervala $[0, 1/2)$, i ako je pao na desnu stranu, posmatramo desnu polovinu intervala $[1/2, 1)$. Zatim okrenemo novčić ponovo (nezavisno) i izaberemo desnu ili levu polovinu, i tako dalje.

Dakle, ako su prva četiri okreta bila $DLLD$, onda je interval bio smanjen na $[5/16, 6/16)$. Svaki put dužina intervala biva skraćena na pola. Ako uzmemo limes leve krajnje tačke intervala kako se broj bacanja približava beskonačnosti, dobijamo jedinstvenu vrednost, i to će biti naš $U \sim \mathsf{Unif}([0, 1])$.

Za većinu vrednosti postoji jedan niz koja dostiže tu vrednost. Na primer,

$$DLDLDLDLDL\cdots$$

vodi ka $2/3$. Za neke vrednosti postoje dva niza koje dostižu tu vrednost, na primer oboje

$$DLLLLLL\ldots \text{ and } LDDDDDDD\ldots$$

vode $1/2$.

U svakom slučaju, *verovatnoća* da će se desiti taj pojedinačni ili dvostruki niz okreta je jednaka 0. I zato neprekidne uniforme imaju verovatnoću 0 da se dobije bilo koja konkretna vrednost.

4.5 *Paradoks realnih brojeva*

Podsetimo se da je za prebrojivo beskonačan niz disjunktnih skupova zbir verovatnoća jednak verovatnoći unije skupova. Svaki skup je disjunktna unija singleton skupova od kojih svaki sadrži samo jedan element. To jest,

$$A = \cup_{a \in A}\{a\}.$$

Tako, za $[0, 1]$,

$$[0, 1] = \cup_{a \in [0,1]}\{a\}.$$

Ipak, za $U \sim \mathsf{Unif}([0, 1])$, $\mathbb{P}(U \in [0, 1]) = 1$, dok je $\mathbb{P}(U = a) = \mathbb{P}(U \in \{a\}) = 0$. Dakle

$$1 \neq \sum_{a \in [0,1]} \mathbb{P}(U = \{a\}).$$

To znači da skup brojeva u $[0, 1]$ *ne* čini skup koji se može prebrojati! Iz tog razloga kažemo da je interval $[0, 1]$ *neprebrojiv* skup.

To je bio mali šok za prvu osobu koja je otkrila ovu činjenicu: Georga Kantora. Mnogi matematičari su jedno vreme odbijali da veruju u to, ali danas je to opšteprihvaćena činjenica o realnim brojevima sa kojom jednostavno moramo da živimo.

Zadaci

4.1 Neka je $W \sim \mathsf{Unif}([-3, 3])$.

a) Odrediti $\mathbb{P}(W \in [-1, 2])$.

b) Odrediti $\mathbb{P}(W \in [-5, 0])$.

4.2 Pretpostavimo da je $Y \sim \mathsf{Unif}[0, 10]$.

a) Naći $\mathbb{P}(Y \in [3, 7])$.

b) Naći $\mathbb{P}(Y \in [6, 12])$.

4.3 Neka je tačka (U_1, U_2) izabrana uniformno iz jediničnog kruga

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Koja je verovatnoća da je $|U_1| \geq U_2$?

4.4 Neka je $U = (U_1, U_2)$ izabrana uniformno iz oblasti: $\{(x, y) : x \geq 2, 0 \leq y \leq 1/x^2\}$.

a) Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(U_1 \leq 5)$?

b) Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(U_2 \geq .01)$?

4.5 Neka su U_1 i U_2 nezavisne slučajne promenljive, unoformne na $[0, 1]$. Koja je verovatnoća da je $U_2 \geq 3U_1$?

4.6 Neka je $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ i pretpostavimo $(X, Y) \sim \mathsf{Unif}(\Omega)$.

a) Naći $\mathbb{P}(X \leq 0.3)$.

b) Za $a \in \mathbb{R}$, naći $\mathbb{P}(X \leq a)$. Napišite rešenje koristeći funkciju indikator.

c) Neka su X_1, X_2, X_3 iid sa istom raspodelom kao X. Naći $\mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, X_3\} \leq 0.3)$.

4.7 Neka je $R \sim \mathsf{Unif}([0, 1])$.

a) Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(R \leq 0.4)$?

b) Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(R \leq 1.4)$?

c) Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(R \leq -0.4)$?

4.8 Neka je (U_1, U_2) uniformno nad četvorougaonom oblasti sa temenima $(0, 0), (0, 1), (2, 2), (2, 0)$. Dokazati da U_1 i U_2 nisu nezavisne.

Glava 5

Funkcije slučajnih promenljivih

Pitanje dana Neka $U \sim \text{Unif}([0,1])$ i neka je $T = -\ln(U)$. Koja je $\mathbb{P}(T \leq a)$ za $a \geq 0$?

Sažetak **Kumulativna funkcija raspodele** ili **cdf** slučajne promenljive X je $\text{cdf}_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a)$. Dve slučajne promenljive sa istim cdf-om imaju istu raspodelu. Intuitivno, slučajna promenljiva je bilo koja funkcija uniformne slučajne promenljive. Nekoliko takvih slučajnih promenljivih, dovoljno važnih da im se daju imena, su sledeće:

- Bernulijevu raspodelu ima slučajna promenljiva koja je 0 ili 1.
- Eksponencijalna raspodela sa stopom λ je negativan prirodni logaritam uniforme preko $[0,1]$ podeljeno sa λ.
- Geometrijska raspodela je broj bacanja (moguće i nepoštenog) novčića potrebnih za dobijanje prve glave.

Pretpostavimo da počnem sa slučajnom promenljivom X koja je uniformna nad $[-1,1]$. Sada uzimam apsolutnu vrednost te slučajne promenljive. Tako $Y = f(X) = |X|$. Imajte na umu da Y sadrži manje informacija od X. Vrednost X nam je govorila i o udaljenosti od 0 i o tome da li je ta vrednost bila pozitivna ili negativna. Vrednost Y nam samo govori udaljenost od 0.

Koja je raspodela od Y? Korisna činjenica je da je raspodela slučajne promenljive sa realnim vrednostima potpuno određena *kumulativnom funkcijom raspodele* ili *cdf*-om promenljive.

Definicija 15
Za slučajnu promenljivu Y, **kumulativna funkcija raspodele** ili funkcija raspodele ili **cdf**[a] od Y je definisana kao

$$\text{cdf}_Y(a) = \mathbb{P}(Y \leq a).$$

[a] *eng. cumulative distribution function*

Činjenica 13
Neka X i Y imaju iste cdf. Onda $\mathbb{P}_X \sim \mathbb{P}_Y$.

To jest, ako X i Y imaju isti cdf, onda imaju istu raspodelu. Dokaz ove važne činjenice obično se daje u drugom kursu realne analize.

Kao naš prvi primer, hajde da pronađemo cdf za uniformne slučajne promenljive nad $[0,1]$.

Činjenica 14
Neka $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$. Tada

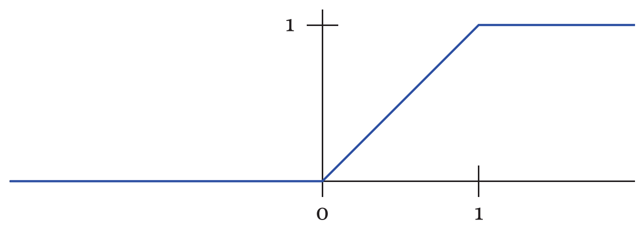
$$\mathrm{cdf}_U(a) = \mathbb{P}(U \leq a) = a\mathbb{1}(a \in [0,1]) + \mathbb{1}(a > 1).$$

Dokaz. Ako $a < 0$, onda $\mathbb{P}(U < a) = 0$. Ako $a \in [0,1]$ onda

$$\mathbb{P}(U \leq a) = \frac{a-0}{1-0} = a,$$

i ako $a > 1$, onda $\mathbb{P}(U \leq a) = 1$. □

Hajde da prikažemo grafikon ove funkcije cdf.



Notacija 3
Još jedna uobičajena notacija za cdf slučajne promenljive je korišćenje velikog slova F, dakle

$$F_Y(a) = \mathrm{cdf}_Y(a).$$

Sada razradimo naš primer od ranije.

Primer 12
Neka $X \sim \mathsf{Unif}([-1,1])$. Koja je raspodela od $Y = |X|$?

Answer Pogledajmo cdf od Y. $|X| \geq 0$ dakle za $a < 0$, $\mathbb{P}(Y < a) = 0$. Takođe, za $X \in [-1,1]$, $|X| \leq 1$, tako da za $a > 1$, $\mathbb{P}(Y < a) = 1$. Najzad, ako $a \in [0,1]$, onda

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq a) &= \mathbb{P}(|X| \leq a) \\
&= \mathbb{P}(-a \leq X \leq a) \\
&= \frac{a-(-a)}{1-(-1)} \\
&= \frac{2a}{2} = a.
\end{aligned}$$

Otuda cdf od Y ije ista kao i cdf uniformne nad intervalom $[0,1]$, i moraju onda imati iste raspodele. To jest, $\boxed{Y \sim \mathsf{Unif}([0,1]).}$

Ponekad je funkcija neprekidne slučajne promenljive diskretna slučajna promenljiva.

Primer 13
Neka $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ i $W = \mathbb{1}(U \leq 0.3) + 4\mathbb{1}(U > 0.3)$. Koja je raspodela od W?

Answer Ovde $\mathbb{P}(W = 1) = \mathbb{P}(U \leq 0.3) = 0.3$ i $\mathbb{P}(W = 4) = (1 - 0.3) = 0.7$, tako da je raspodela

$$\boxed{\mathbb{P}(W = 1) = 0.3,\ \mathbb{P}(W = 4) = 0.7}.$$

Dobija se da *svaka* realna slučajna promenljiva mozže biti napisana kao funkcija jedne ili više uniformnih slučajnih promenljivih!

Intuicija 2
Neka $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ i $X = f(U)$ za neku funkciju f koja može biti izračunata. Onda je X **slučajna promenljiva.**

Neke napomene o ovoj ideji slučajne promenljive:

1. U naprednijoj teoriji verovatnoće uzimaju se slučajne promenljive da budu *merljive funkcije*. Ove funkcije šire pojam izračunljive funkcije. Za ovu naprednije definiciju vidi poglavlje 32.
2. Koje funkcije se mogu izračunati zavisi od modela koji koristimo za izračunavanje. Za naše svrhe, sve najčešće korišćene funkcije (kvadriranje, množenje, sabiranje i tako dalje) su izračunljive funkcije.
3. Za *kompjutersku simulaciju* ova definicija znači bilo koji niz uniformnih $[0,1]$ slučajnih promenljivih može se koristiti kao izvor slučajnosti u simulaciji.
4. Primetimo da ako $X = f(U_1)$ za $U_1 \sim \mathsf{Unif}([0,1])$, i $Y = g(X)$, onda $Y = g(f(U_1))$. To znači da je bilo koja izračunljiva funkcija slučajne promenljive druga slučajna promenljiva.

S obzirom na ovu definiciju, sada možemo pogledati neke uobičajene raspodele.

5.1 *Bernulijeva raspodela*

Naša prva raspodela se zove *Bernulijeva raspodela* po švajcarskom matematičaru Jakobu Bernuliju i njegovom pionirskiom radu u teoriji verovatnoće. To je u nekom smislu najjednostavnija netrivijalna raspodela, gde slučajna promenljiva B ima Bernulijevu raspodelu ako $\mathbb{P}(B = 1) = p$ i $\mathbb{P}(B = 0) = 1 - p$ za neko $p \in [0,1]$.

Definicija 16
Kazaćemo da B ima **Bernulijevu raspodelu sa parametrom** p, i pisati $B \sim \mathsf{Bern}(p)$, ako $B = \mathbb{1}(U \leq p)$, gde $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$.

5.2 *Eksponencijalna raspodela*

Slučajna promenljiva $T = -\ln(U)$ je važna u verovatnoći. Kažemo da ova slučajna promenljiva ima *eksponencijalnu* raspodelu. Uopštenije, ovo je definisano na sledeći način.

Definicija 17
Kažemo da T ima **eksponencijalnu raspodelu** sa stopom λ, i pišemo $T \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$, gde $\lambda > 0$ je parametar, ako

$$T = -\frac{1}{\lambda}\ln(U),$$

gde $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$.

Pošto $U \in (0,1)$ sa verovatnoćom 1, $\ln(U) < 0$, tako da je $T > 0$ sa verovatnoćom 1.

5.3 Magija uniformnih nad $[0,1]$

Jedna od sjajnih stvari u vezi sa uniformnom nad $[0,1]$ je da možete da je koristite da dobijete više od jedne uniforme nad $[0,1]$!

Zapamtimo da uniformna slučajna promenljiva nad $[0,1]$ može biti shvaćena kao beskonačan niz uniformnih slučajnih cifara iz skupa $\{0,1,\ldots,9\}$. Na primer,

$$U = 0.66113356083398457297 9351\ldots$$

daje niz cifara $6,6,1,1,3,3,5,6,0,8,3,9,8,\ldots$.

Pretpostavimo sada da želimo dve uniformne nad $[0,1]$. Onda možemo da uzmemo samo neparne cifre za prvu uniformnu, a parne za drugu. To jest

$$U_1 = 0.613503947995\ldots$$
$$U_2 = 0.613683852731\ldots.$$

Tako je $X = f(U) = U_1 - U_2$ takođe slučajna promenljiva!

Možemo ići i dalje! Podelimo U_2 u U_2 i U_3, zatim podelimo U_3 u U_3 i U_4, itd. Na kraju, rezultat je beskonačan niz slučajnih promenljivih uniformnih na $[0,1]$.

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots.$$

Pošto je svaka uniforma sastavljena od nezavisnih cifara, svaka će takođe biti nezavisna od ostalih. Takav niz nezavisnih, identično raspodeljenih slučajnih promenljivih, se naziva *iid*. [2]

Definicija 18
Neka $X_1, X_2, \ldots$ imaju istu raspodelu i za svako n, $(X_1,\ldots,X_n)$ su nezavisne slučajne promenljive. Kažemo da $\{X_i\}$ formiraju niz **nezavisnih, identično raspodeljenih** ili **iid** slučajnih promenljivih.

Onda važi sledeće.

Činjenica 15
Neka su $U_1, U_2, \ldots$ iid $\mathsf{Unif}([0,1])$. Onda svala $f(U_1,U_2,\ldots)$ koja može biti izračunata daje novu slučajnu promenljivu.

Ovo se može iskoristiti za dobijanje *geometrijske raspodele*. Neka je G najmanja vrednost i takva da $U_i \le p$. Tada kažemo da G ima *geometrijsku raspodelu* sa parametrom p.

[2] *eng. independent, identically distributed*

Matematički se najmanja vrednost nepraznog skupa A naziva *infimum* skupa A (pišemo $\inf(A)$). Na primer,

$$\begin{aligned} \inf\{1, 2, 3\} &= 1 \\ \inf\{4, 6, 8, \ldots\} &= 4 \\ \inf\{\} &= \infty. \end{aligned}$$

Poslednja jednakost je prema konvenciji: $\inf(\emptyset) = \infty$.

Sada, ako je $U_1, U_2, \ldots$ niz iid uniformnih po $[0, 1]$, onda $\mathbb{1}(U_1 \leq p), \mathbb{1}(U_2 \leq p), \mathbb{1}(U_3 \leq p), \ldots$ je niz nula i jedinica. Na primer, taj niz može biti

$$0, 0, 1, 0, 1, 1, \ldots.$$

Onda su pozicije jedinica $\{3, 5, 6, \ldots\}$. Infimum ovog skupa je 3, što je prva pozicija 1. Ovo motiviše definiciju geometrijski raspodeljene slučajne promenljive, što je broj okretanja novčića sa verovatnoćom glave p potrebnim da se dobije prva glava.

Definicija 19
Neka je $G = \inf\{i : U_i \leq p\}$. Tada pišemo $G \sim \text{Geo}(p)$, i kažemo da je G i **geometrijska slučajna promenljiva sa parametrom** p gde su U_1, U_2, U_3 iid.

Geometrijsku slučajnu promenljivu možete zamisliti kao broj bacanja novčića koji je potreban da se dobije prva glava, gde je verovatnoća da je novčić padne na glavu p.

Primer 14
Neka $G \sim \text{Geo}(0.3)$. Koja je verovatnoća da je $G = 3$?

Odgovor Za G da bude jednako 3, mora biti $U_1 > 0.3, U_2 > 0.3$ i $U_3 \leq 0.3$. Onda

$$\mathbb{P}(G = 3) = (1 - 0.3)(1 - 0.3)(0.3) = \boxed{0.1470}.$$

Zadaci

5.1 Uzmimo da je $U \sim \text{Unif}([0, 1])$ i $A = -\ln(U)/2$.

a) Naći $\mathbb{P}(A \geq 2)$.
b) Naći $\mathbb{P}(A \geq -2)$.
c) Za $a \geq 0$, naći $\mathbb{P}(A \geq a)$.
d) Za $a < 0$, naći $\mathbb{P}(A \geq a)$.

5.2 Uzmimo $U \sim \text{Unif}([0, 1])$ i $W = 1/U$.

a) Naći $\mathbb{P}(W \geq 2)$.
b) Naći $\mathbb{P}(W \geq -2)$.

5.3 Neka je $U \sim \text{Unif}([-1, 1])$. Naći cdf za $1 - U^2$.

5.4 Neka je $U \sim \text{Unif}([-1, 1])$. Naći cdf za U^3.

5.5 Neka je je ω uniformna nad $[0,1]$, i uzmimo $X(\omega) = 2\omega + 3$. Naći

a) $\mathbb{P}(X \in [3.5, 4.7])$.

b) $\mathbb{P}(X \in [0, 1])$.

c) $\mathbb{P}(X^2 \leq 10)$.

5.6 Uzmimo da je $U \sim \mathsf{Unif}([-1,0])$. Dokazati da $-U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ pokazujući da je $\mathrm{cdf}_{-U}(a) = a\mathbb{1}(a \in [0,1]) + \mathbb{1}(a > 1)$.

5.7 Uzmimo $U \sim \mathsf{Unif}([-1,0])$.

a) Neka je $X = U^2$. Naći cdf za X.

b) Naći cdf za U.

5.8 Uzmimo $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ i $X = U^2$. Naći cdf_U.

5.9 Neka je $G \sim \mathsf{Geo}(p)$. Za i vrednost u skupu $\{1, 2, 3 \ldots\}$, koliko je $\mathbb{P}(G = i)$?

5.10 Uzmimo (U_1, U_2) uniformno na četvorougaonoj oblasti sa temenima $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,2)$, i $(2,0)$. Naći cdf za U_1.

5.11 Neka je $U \in [-1, 1]$. Koliko je $\mathbb{P}(U^2 \geq 0.6)$?

5.12 Uzmimo $T \sim \mathsf{Exp}(2)$. Naći i prikazati graf od cdf_T.

5.13 Razmotrite verovatnoću da za nezavisne slučajne promenljive $\mathsf{Exp}(1)$ i $\mathsf{Unif}([0,1])$, druga promenljiva bude veća od prve. Da bismo to pronašli, neka U_1 i U_2 budu nezavisne i identično distribuirane promenljive sa $\mathsf{Unif}([0,1])$. Zatim postavite $T = -\ln(U_2)$. Zatim pronađite $\mathbb{P}(U_1 \geq T)$.

5.14 Neka su $T_1 \sim \mathsf{Exp}(1)$ i $T_2 \sim \mathsf{Exp}(2)$ nezavisne. Naći $\mathbb{P}(T_1 \geq T_2)$.

5.15 Neka su $B \sim \mathsf{Bern}(p)$ i $T \sim \mathsf{Exp}(1)$ nezavisne slučajne promenljive. Naći $\mathbb{P}(T \geq B)$.

5.16 Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X = 1) = 0.2$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0.3$, i $\mathbb{P}(X = 3) = 0.5$. Za $T \sim \mathsf{Exp}(1)$ nezavisno od X, naći $\mathbb{P}(T \geq X)$.

5.17 Vreme do radioaktivnog raspada pojedinačnog atoma je eksponencijalno raspoređeno sa stopom λ. Ako je T vreme do raspada čestice, poluživot t_{hl} je vreme takvo da važi $\mathbb{P}(T \geq t_{\mathrm{hl}}) = 1/2$. Poluživot za atom uranijuma 238 je 4.5 milijardi godina.

a) Koliko je λ?

b) Ako je Zemlja stara 4.2 milijarde godina, koja je verovatnoća da je atom U-238 prisutan pri rođenju planete i dalje netaknut?

5.18 Plutonijum 241 ima poluživot od 14.4 godine. Koja je verovatnoća da pojedinačni atom Pu-241 preživi barem 20 godina?

Glava 6

Uslovljavanje

Pitanje dana Neka $T \sim \mathsf{Exp}(2)$. Koja je verovatnoća da je T bar 4 ako je dato da je bar 1?

Sažetak Uslovljavanje je način da se kaže koje dodatne informacije o slučajnoj promenljivoj su nam date. Koristimo vertikalnu crtu | da odvojimo slučajnu promenljivu (levo od crte), i informacije (desno od crte). Dakle, $\mathbb{P}(X \in A|Y \in B)$ označava verovatnoću da slučajna promenljiva X pada u skup A data informacija da slučajna promenljiva Y pada u skup B. Ukoliko $\mathbb{P}(Y \in B) > 0$, onda

$$\mathbb{P}(X \in A|Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)}.$$

Kada imamo dodatno znanje o slučajnoj promenljivoj, obično koristimo vertikalnu crtu | da odvojimo događaj čiju verovatnoću želimo (levo) i događaj za koji znamo da se desio (desno).

Dakle, za pitanje dana, ono što želimo da nađemo je

$$\mathbb{P}(T \geq 4|T \geq 1).$$

Desno od crte stoji $\{T \geq 1\}$, događaj za koji znamo da se desio. Levo od crte je događaj $\{T \geq 4\}$ čiju verovatnoću pokušavamo da nađemo. Kažemo da pokušavamo da nađemo. verovatnoću događaja $T \geq 4$ ako je dato $T \geq 1$.

Da bismo razumeli šta je ova verovatnoća, pomoći će nam da prvo razmotrimo jednostavan primer. Neka je $U \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$, i imamo dodatnu informaciju da je $U \leq 4$. Šta bi onda bila raspodela od U dato $U \leq 4$(pišemo $[U|U \leq 4]$)?

Pa, reći $U \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ znači da nemamo informacije o tome koja je mogućnost verovatnija. Dodatne informacije da $U \leq 4$ eliminiše 5 i 6 kao moguće vrednosti, ali nam to ne govori bilo šta o tome da li je (recimo) 3 verovatnije od 1. Ovo vodi sledećoj intuiciji.

Intuicija 3
Neka je $A \subseteq B$ gde A ima pozitivnu meru. Onda za $U \sim \mathsf{Unif}(B)$,

$$[U|U \in A] \sim \mathsf{Unif}(A).$$

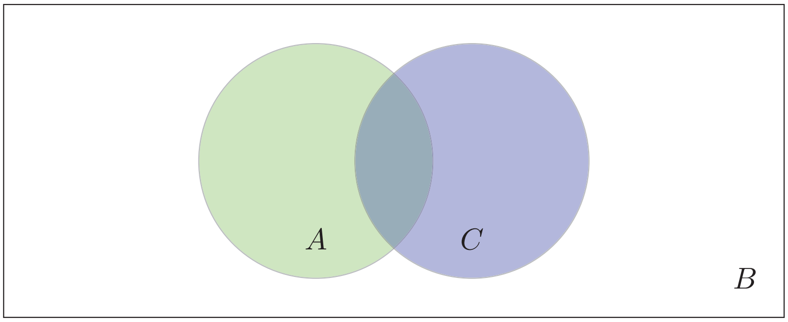
Posebno neka je $C \subseteq A \subseteq B$, i $U \sim \mathsf{Unif}(B)$. Onda

$$\mathbb{P}(U \in C | U \in A) = \mathbb{P}(W \in C),$$

gde $W \sim \mathsf{Unif}(A)$. Dakle

$$\mathbb{P}(U \in C | U \in A) = \frac{m(C)}{m(A)} = \frac{m(C)/m(B)}{m(A)/m(B)} = \frac{\mathbb{P}(U \in C)}{\mathbb{P}(U \in A)}.$$

Sada razmotrite uslovljavanje kada C nije podskup A. Dakle, Veneov dijagram bi mogao izgledati otprilike



Setimo se da $U \sim \mathsf{Unif}(B)$, rečeno nam je da upada u A, i sad se pitamo kolika je šansa da upada i u C? Naravno, većina C se ne dešava. Jedini način da U padne u C u ovom trenutku je ako U pada u $A \cap C$. Dakle

$$\mathbb{P}(U \in C | U \in A) = \mathbb{P}(U \in A \cap C | U \in A) = \frac{m(A \cap C)}{m(A)}.$$

Podelimo sad i brojilac i imenilac sa $m(B)$ da bi dobili

$$\mathbb{P}(U \in C | U \in A) = \frac{m(AC)/m(B)}{m(A)/m(B)} = \frac{\mathbb{P}(U \in A \cap C)}{\mathbb{P}(U \in A)}.$$

U ovom trenutku setimo se da su sve raspodele verovatnoće zasnovane na uniformnoj raspodeli preko $[0, 1]$. To znači da za bilo koja dva događaja E_1 i E_1, postoje C i A takvi da

$$E_1 = \{U \in C\}, \ E_2 = \{U \in A\}.$$

Dakle

$$\mathbb{P}(E_1 | E_2) = \mathbb{P}(U \in C | U \in A) = \frac{\mathbb{P}(U \in A, U \in C)}{\mathbb{P}(U \in A)} = \frac{\mathbb{P}(E_1, E_2)}{\mathbb{P}(E_2)}.$$

Ovaj argument motiviše sledeću definiciju uslovne verovatnoće.

Definicija 20
Za događaje A i B gde $\mathbb{P}(B) > 0$, **uslovna verovatnoća događaja A ako je dat događaj B** je

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Konkretno, ako imamo slučajne promenljive X i Y i događaje $A = \{X \in C\}$ i $B = \{Y \in D\}$, tada

$$\mathbb{P}(X \in C | Y \in D) = \frac{X \in C, Y \in D}{\mathbb{P}(Y \in D)}.$$

Pitanje Dana Imajući ovo na umu, sada možemo da se pozabavimo pitanjem dana. U ovom problemu nam je dato da $T \sim \text{Exp}(2)$. Podsetimo se da to znači da $T = -(1/2)\ln(U)$, gde je U uniformna na $[0, 1]$.

Sada da bismo rešili pitanje dana, potrebno nam je samo da primenimo formulu za uslovnu verovatnoću.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \geq 4 | T \geq 1) &= \frac{\mathbb{P}(T \geq 4, T \geq 1)}{\mathbb{P}(T \geq 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T \geq 4)}{\mathbb{P}(T \geq 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(-(1/2)\ln(U) \geq 4)}{\mathbb{P}(-(1/2)\ln(U) \geq 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\ln(U) \leq -8)}{\mathbb{P}(\ln(U) \leq -2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(U \leq \exp(-8))}{\mathbb{P}(U \leq \exp(-2))} \\
&= \frac{\exp(-8)}{\exp(-2)} = \exp(-6) \approx \boxed{0.002478}.
\end{aligned}$$

Nezavisnost se može posmatrati u smislu uslovnih verovatnoća.

Činjenica 16
Dve slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako i samo ako za svako A i B sa $\mathbb{P}(Y \in B) > 0$,

$$\mathbb{P}(X \in A | Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A). \tag{6.1}$$

Dokaz. Pretpostavimo da su X i Y nezavisne. Neka su A i B takvi da $\mathbb{P}(Y \in B) > 0$. Tada

$$\mathbb{P}(X \in A | Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)} = \frac{\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)} = \mathbb{P}(X \in A).$$

Sa druge strane, pretpostavimo da (6.1) važi za sve A i B takve da $\mathbb{P}(Y \in B) > 0$. Neka je A bilo kakav merljiv skup.

Neka je B bilo koji merljiv skup takav da $\mathbb{P}(Y \in B) = 0$. Onda $\{X \in A, Y \in B\} \subseteq \{Y \in B\}$.

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \leq \mathbb{P}(Y \in B) = 0 = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Neka je sada B bilo koji merljiv skup sa $\mathbb{P}(Y \in B) > 0$. Onda

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A | Y \in B)\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

U oba slučaja, verovatnoća preseka je proizvod verovatnoća, pa su X i Y nezavisne. □

Drugim rečima, X i Y su nezavisne ako poznavanje neke informacije u vezi Y ne menja raspodelu od X.

6.1 Drugi načini posmatranja uslovljavanja

Sve dok je $\mathbb{P}(A > 0)$,

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A, B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Drugačiji način posmatranja ove formule je da se kaže da s obzirom na informaciju da se desilo A, mi više ne radimo u prostoru ishoda Ω, već radimo samo u okviru A. Dakle, to postaje naš novi prostor ishoda. Prisetimo se da je jedno od naših pravila verovatnoće da je verovatnoća da je događaj u prostoru ishoda jednaka 1. Dakle, moramo da renormalizujemo naše verovatnoće da bi to omogućili. Zato delimo $\mathbb{P}(A, B)$ by $\mathbb{P}(A)$. Tako,

$$\mathbb{P}(A|A) = \frac{\mathbb{P}(A, A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$$

Treći način posmatranja uslovne verovatnoće je dvostepeni eksperiment. Pretpostavimo da imamo proizvod koji može imati svojstvo A, a možda i svojstvo B. Kolika je šansa da proizvod ima oba svojstva?

Pa, pretpostavimo da pošaljemo proizvod u dve prostorije na testiranje. Prvi testovi u sobi da vidite da li proizvod ima svojstvo A. Ako ima svojstvo A, onda proizvod prelazi u drugu sobu, koja testira da li ima svojstvo B. Ako proizvod nema svojstvo A, onda se odmah uništava bacanjem u najbliži vulkan.

Šansa da prva soba pošalje proizvod dalje je $\mathbb{P}(A)$. Šansa da druga soba šalje proizvod dalje je $\mathbb{P}(B|A)$ (pošto soba 2 testira samo svojstvo B ako je proizvod prošao prvi test). Šansa da prozivod prođe obe sobe je $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$. Ovo mora biti jednako šansi da proizvod ima oba svojstva, dakle

$$\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A).$$

6.2 Podsetnik: razlika između disjunktnosti i nezavisnosti

Postoje dva važna svojstva koja par događaja može imati. Prvi jeste da su disjunktni. To znači da se oba događaja ne mogu desiti u isto vreme. Na primer, određenog dana ne može istovremeno da pada i ne pada kiša.

Disjunktni događaji sa pozitivnom verovatnoćom nikada ne mogu biti nezavisni, jer

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

dok $\mathbb{P}(A) > 0$ i $\mathbb{P}(B) > 0$ impliciraju $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$.

Ako su dva događaja A i B disjunktna

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Nezavisno znači da saznanje da se desio jedan događaj ne menja verovatnoću da se desi drugi događaj. Tako

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ukratko: funkcija verovatnoće pretvara uniju disjunktnih skupova u sumu i pretvara presek nezavisnih skupova u proizvod. Primetimo da je ovo slično (ali ne potpuno isto) kako funkcionišu unije i preseci sa indikatorskim funkcijama:

$$\mathbb{1}(A \cup B) = \mathbb{1}(\mathbb{1}(A) + \mathbb{1}(B) > 0),\ \mathbb{1}(AB) = \mathbb{1}(A)\mathbb{1}(B).$$

Zadaci

6.1 Neka je $\mathbb{P}(A|B) = 0.3$ i $\mathbb{P}(B) = 0.8$. Koliko je $\mathbb{P}(AB)$?

6.2 Verovatnoća kiše u utorak je 40%. Ako pada kiša u utorak, verovatnoća kiše u sredu je 50%. Koja je verovatnoća da pada kiša i u utorak i u sredu?

6.3 Pretpostavimo $\mathbb{P}(A) = 0.3$ i $\mathbb{P}(B) = 0.5$, i znamo da su A i B nezavisni. Koja je vrednost $\mathbb{P}(A|B)$?

6.4 Pošto su A i B nezavisni sa $\mathbb{P}(A) = 0.35$ and $\mathbb{P}(B) = 0.21$. Koliko je $\mathbb{P}(A|B)$?

6.5 Neka je $X \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$.

a) Koliko je $\mathbb{P}(X = 5|X \geq 3)$?
b) Koliko je $\mathbb{P}(X = 5|X \geq 6)$?

6.6 Verovatnoća da se bude dijagnostikovan sa ne-Hočkinovim limfomom tokom godine je otprilike 0.000194. Koja je verovatnoća da će dva prijatelja (pretpostavljajući nezavisnost) biti dijagnostikovana sa limfomom u istoj godini?

6.7 Neka je $X \sim \mathsf{Unif}(\Omega)$, gde je Ω konačan skup. Neka je $A \subseteq \Omega$. Neka Y ima istu distribuciju kao i X, uz uslov da je $X \in A$. Dokazati da važi $Y \sim \mathsf{Unif}(A)$.

6.8 Pretpostavimo da je (U_1, U_2) uniformno nad $[0, 1] \times [0, 1]$. Naći

$$\mathbb{P}(U_1 \geq 0.5|U_1 \geq 3U_2).$$

6.9 Laboratorija povremeno ima manje curenje hemikalija u eksperimentalnom prostoru. Svako curenje je nezavisno od drugih i ima 90% šanse da bude bezopasno i 10% šanse da bude otrovno. Direktorka laboratorije ima na raspolaganju dva bespilotna drona. Prvi dron može da detektuje da li ima otrovnih curenja u laboratoriji ili ne. Drugi dron može da prebroji broj curenja prisutnih u laboratoriji.

Dronovi su poslati: prvi izveštava da postoji barem jedno otrovno curenje u laboratoriji. Drugi dron izveštava da se u laboratoriji tačno nalaze tri curenja.

Uslovljeno ovom informacijom, koja je verovatnoća da postoji tačno jedno otrovno curenje i dva bezopasna curenja?

6.10 Pretpostavimo $\mathbb{P}(X \in A) = 0.2$, $\mathbb{P}(X \in B) = 0.7$, $\mathbb{P}(X \in C) = 0.4$, i $\mathbb{P}(X \in AC) = 0.15$. Koliko je $\mathbb{P}(X \in A|X \in C)$?

6.11 Za $U \sim \mathsf{Unif}([2, 10]$, koliko je $\mathbb{P}(U \leq 3|U \leq 5)$?

6.12 Neka su X_1, X_2, X_3 iid $\mathsf{Unif}(\{1, 2, \ldots, 6\})$. Neka je $R = \min\{X_1, X_2, X_3\}$. Koliko je $\mathbb{P}(R = 6|R \geq 3)$?

Glava 7

Binomna raspodela i Bajesovo pravilo

Pitanje dana Neka p označava verovatnoću da se ekperiment završi uspešno. Na početku neka je recimo $p \sim \mathsf{Unif}(\{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.8, 0.9, 1\}$. Eksperiment se sprovodi nezavisno šest puta, tako da su bila dva uspeha i četiri neuspeha. Šta je nova raspodela od p s obzirom na ovu informaciju?

Sažetak **Binomna raspodela** (piše se $N \sim \mathsf{Bin}(n, p)$) je broj uspešnih eksperimenta kada se obavi n nezavisnih eksperimenata sa verovatnoćom uspeha p. Za $i \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(N = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

gde je $\binom{n}{i}$ (čitamo n nad i) $n!/[i!(n-i)!]$.
Bajesovo pravilo je način izvrtanja uslovnih verovatnoća. Pravilo kaže da ako su A i B događaji sa verovatnoćama većim od 0

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

U pitanju dana, eksperiment se vodi nezavisno više puta. Za broj uspeha N u takvoj situaciji se kaže da ima *binomnu raspodelu*. Kad jednom razumemo binomnu raspodelu, razumećemo i šta je $[N|p]$, to jest raspodela od N dato p.

Ali u pitanju dana nas interesuje obrnuto, želimo da znamo $[p|N]$. *Bajesovo pravilo* koristi formulu uslovne verovatnoće da to odredi, i daje nam metodičan način za rešavanje sličnih problema.

7.1 *Binomna raspodela*

Da bismo razumeli binomnu raspodelu, počnimo sa konkretnim primerom.

Primer 15
Pretpostavimo da je $p = 0.4$, a N je broj uspešnih realizacija eksperimenta koji se pokreće nezavisno 6 puta. Šta je $\mathbb{P}(N = 4)$?

Rešenje Razmotrimo niz eksperimenata sa 4 uspeha. Na primer, UUNUNU je jedan takav niz. Ovaj konkretan niz (zbog nezavisnosti) ima šansu da se realizuje jednaku

$$p \cdot p \cdot (1-p) \cdot p \cdot (1-p) \cdot p = p^4(1-p)^2.$$

Imajte na umu da smo stavili činilac p svaki put kada postoji uspeh, i činilac $1-p$ za svaki neuspeh.

Svaki niz sa 4 U i 2 N će imati šansu $p^4(1-p)^2$ da se dogodi. Koliko takvih nizova ima? Pa, prvi N bi se mogao pojaviti na prvom mestu, što ostavlja 5 mesta za drugi N. Ili može biti na drugom mestu, ostavljajući 4 mesta za drugi N. Sabiranje svih mogućnosti daje $5+4+3+2+1 = 15$ mesta. Dakle, ukupna verovatnoća je

$$15(0.4)^4(0.6)^2 = 0.13824 \approx \boxed{0.1382}.$$

Ovo možemo generalizovati da bismo dobili binomnu raspodelu.

Definicija 21
Pretpostavimo da je eksperiment, sa verovatnoćom uspeha p, ponovljen nezavisno n puta. Ako je N broj uspeha, kažemo da N ima **binomnu raspodelu** sa parametrima n i p. I pišemo $N \sim \mathsf{Bin}(n, p)$.

Termin binomna dolazi od binomnih koeficijenata $\binom{n}{i}$.

Definicija 22
Binomni koeficijent $\binom{n}{i}$ (čitaj n nad i) je broj nizova u $\{U, N\}^n$ koji imaju tačno i komponente označene kao U.

Činjenica 17
Formula za binomni koeficijent je

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

U Primeru 15 ranije, trebalo nam je $\binom{6}{4} = 6!/[4!2!] = 6 \cdot 5/[1 \cdot 2] = 15$ što smo našli direktno pa tako znamo da bar u tom slučaju formula radi!

Dokaz. Razmotrimo broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ovo je niz u $\{1, \ldots, n\}^n$ gde svaka komponenta ima drugačiju oznaku. Permutacija se može naći tako što prvo izaberemo koji od n elemenata je prvi, ostavljajući $n-1$ elemenata, i tako dalje do 1. Dakle, broj permutacija je $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$.

Ili smo mogli da izaberemo na koja mesta ulaze elementi $\{1, \ldots, i\}$, zatim permutujemo ove elemente na $i!$ načine, a zatim permutujemo preostale elemente na $(n-i)!$ načine. Oba načina računaju istu stvar, pa su jednaki, i

$$n! = \binom{n}{i} \cdot i! \cdot (n-i)!.$$

Preuređivanje elemenata dovršava dokaz. □

Činjenica 18
Za $N \sim \mathsf{Bin}(n,p)$ i $i \in \{0,1,\ldots,n\}$

$$\mathbb{P}(N = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

gde je $\binom{n}{i}$ broj nizova u $\{U,N\}^n$ sa i-tom komponentom označenom U.

Dokaz. Neka je $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Zatim svaki niz sa i U-ova će imati $n-i$ N-ova, i tako će imati verovatnoću $p^i(1-p)^{n-i}$ zbog nezavisnosti. Broj takvih nizova je $\binom{n}{i}$ po definiciji. □

Dakle, za pitanje dana, sada znamo kako da izračunamo raspodelu od N dato p. Ali možemo li učiniti obrnuto? Možemo li izračunati p ako je dato N? To je ono što je suština Bajesovog pravila.

7.2 Bajesovo pravilo

Bajesovo pravilo (ili Bajesova teorema ili Bajesova formula) govori nam kako da „obrnemo" uslovne verovatnoće.

Teorema 1 (Bajesovo pravilo)
Neka su A i B takvi dogadjaji da su i $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(B)$ veći od 0. Onda važi

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Dokaz. Primetimo da je

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

Deljenjem obe strane sa $\mathbb{P}(B)$ dobijamo konačni rezultat. □

Naoružani Bajesovim pravilom, spremni smo da odgovorimo na pitanje dana.

Pitanje dana Dato nam je da $[N|p] \sim \mathsf{Bin}(6,p)$, i želimo da nađemo $[p|N=2]$. Neka je $\Omega = n\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}$. Pošto je $p \in \Omega$ sa verovatnoćom 1, i pod uslovom $N = 2$, p će još uvek biti u Ω. Dakle ono što želimo da nađemo je

$$\mathbb{P}(p = \alpha | N = 2)$$

za sve $\alpha \in \Omega$.

Iz Bajesovog pravila dobijamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(p=\alpha|N=2) &= \frac{\mathbb{P}(N=2|p=\alpha)\mathbb{P}(p=\alpha)}{\mathbb{P}(N=2)} = \frac{\binom{6}{2}\alpha^2(1-\alpha)^4(1/11)\mathbb{1}(\alpha\in\Omega)}{\mathbb{P}(N=2)} \\ &= C\alpha^4(1-\alpha)^2\mathbb{1}(\alpha\in\Omega).\end{aligned}$$

Ostaje nam jedino da nađemo C. Prema zakonu potpune verovatnoće

$$\sum_{a\in\Omega} \mathbb{P}(p=\alpha|N=2) = \sum_{a\in\Omega} C\alpha^2(1-\alpha)^4 = 1$$

odakle dobijamo da je C jednako

$$C = \left[\sum_{a\in\Omega} \alpha^2(1-\alpha)^4\right]^{-1}.$$

Ako je skup Ω mali, onda se ovo može uraditi pešaka. Ovde je $\#(\Omega) = 11$, tako da sledeći kôd u R obavlja sav posao.

```
alpha <- seq(0, 1, by = 0.1)
print(alpha^2 * (1 - alpha)^4)
C = 1 / sum(alpha^2 * (1 - alpha)^4)
print(C * alpha^2 * (1 - alpha)^4)
```

Rezultat je dat u sledećoj tabeli. U drugoj koloni su nenormalizovane verovatnoće za p dato $N = 2$. Treća kolona je druga kolona podeljena zbirom unosa u drugoj koloni da bismo bili sigurni da je zbir unosa jednak 1. Treća kolona je odgovor na pitanje.

	α	$\alpha^2(1-\alpha)^4$	$\mathbb{P}(p=\alpha\|N=2)$
	0	0	0
	0.1	0.006561	0.06891
	0.2	0.016384	0.1720
	0.3	0.21609	0.2269
	0.4	0.020736	0.2178
	0.5	0.015625	0.1641
	0.6	0.009216	0.09680
	0.7	0.003969	0.04168
	0.8	0.001024	0.01075
	0.9	.000081	0.0.0008507
	1	0	0
sum	0.0925	1	

7.3 Varijante Bajesovog pravila

U korišćenju $\mathbb{P}(X \in A|Y \in B) = \mathbb{P}(Y \in B, X \in A)\mathbb{P}(X \in A)/\mathbb{P}(Y \in B)$, često je od pomoći da se B podeli u dva disjunktna skupa, $B = A^C B + AB$. Tako dobijamo sledeću varijantu Bajesovog pravila:

Činjenica 19
Neka su A i B događaji takvi da su $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A^C)$ i $\mathbb{P}(B)$ pozitivne. Onda

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^C)\mathbb{P}(A^C)}.$$

Primer 16
Studenti koji uče za ispit (što rade sa verovatnoćom 30%) imaju 95% verovatnoće da će položiti. Studenti koji ne uče imaju samo 80% šanse da polože. Ako je dato da student polaže ispit, kolika je šansa da je učio?

Rešenje Neka je S događaj da on/ona uče a P događaj da polože. Tada

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S|P) &= \frac{\mathbb{P}(P|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(P|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(P|S^C)\mathbb{P}(S^C)} \\ &= \frac{(0.95)(0.3)}{(0.95)(0.3) + (0.8)(0.7)} \approx \boxed{33.72\%}.\end{aligned}$$

Pošto učenje ne menja mnogo prolaznost u relativnom smislu, ne utiče mnogo na uslovnu verovatnoću. Pretpostavimo sada da ne smatramo samo puki prolaz, već ko dobije A na ispitu.

Primer 17
Studenti koji uče za ispit (što rade sa verovatnoćom 30%) imaju 60% verovatnoće da će dobiti A. Studenti koji ne uče imaju samo 10% šanse da dobiju A. Ako student dobije A, kolika je šansa da su učili?

Rešenje Neka je S događaj da on/ona uče, i A događaj da dobiju A na ispitu. Onda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(A|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(A|S^C)\mathbb{P}(S^C)} \\ &= \frac{(0.6)(0.3)}{(0.6)(0.3) + (0.1)(0.7)} \approx \boxed{72\%}.\end{aligned}$$

Skup $\{A, A^C\}$ formira jednu *particiju* skupa Ω.

Definicija 23
Skupovi $A_1, \ldots, A_n$ **particiraju** Ω ako su disjunktni i njihova unije je jednaka Ω

Činjenica 20
Za particiju $A_1, \ldots, A_n$ of Ω i bilo koji događaj B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Dokaz. Primetimo

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup \cdots \cup (B \cap A_n).$$

Pošto su A_i disjunktni, događaji $B \cap A_i$ su takođe disjunktni. Dakle

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Sada možemo koristiti formulu uslovne verovatnoće na svaki od ovih sabiraka

$$\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Rezultat sledi.

□

Zadaci

7.1 Neka je $X \sim \mathsf{Bin}(10, 0.2)$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(X \geq 2)$?

7.2 Neka je $X \sim \mathsf{Bin}(10, 0.23)$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(X \leq 2)$?

7.3
a) Koliko je 5 nad 2?
b) Na koliko načina mogu da se rasporede slova AABBB?

7.4 Svako slovo u nizu DNK je podjednako verovatno da bude jedno od $\{A, G, C, T\}$. Koja je verovatnoća da tačno 10 od 40 slova u nizu su slovo A?

7.5 Koliko nizova sastavljenih od slova F i S su dužine 10 i imaju tačno 8 slova S?

7.6 Posmatrajmo broj nizova od 10 slova sastavljenih od slova F i S koji imaju tačno osam slova S. Takav niz mora početi ili sa slovom F ili sa S.

a) Ako niz počinje slovom F, onda među prestalih 9 slova mora biti tačno 8 slova S. Na koliko načina može ovo da se dogodi?
b) Ako niz počinje slovom S, onda među prestalih 9 slova mora biti tačno 7 slova S. Na koliko načina može ovo da se dogodi?
c) Sabiranjem rezultata iz prethodna dva dela dobijamo ukupno 10 nizova slova sa tačno 8 slova S.

7.7 Neka je $N \sim \mathsf{Bin}(10, 0.3)$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(N = 8)$?

7.8 Ispitivanje leka ima 18 učesnika, od kojih se za svaki očekuje (nezavisno) da bude uspeh sa verovatnoćom 0.2. Koja je verovatnoća da jedan ili nula učesnika bude uspešan?

7.9 Pretpostavimo da je $[X|N] \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, \ldots, N\})$ i da $N \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$. Kolika je verovatnoća
$$\mathbb{P}(N = 3|X = 2)?$$

7.10 Dimer Pharmaceuticals proizvodi 3 vrste lekovi za određenu bolest. Prvi je efikasan u 50%. pacijenata, drugi u 37%, a treći u 5%.

a) Ako postoji jednaka verovatnoća da će pacijent dobiti bilo koji od tri leka, kolika je verovatnoća da je lek efikasan za njihovu bolest?
b) Ako je lek efikasan za pacijenta, kolika je verovatnoća da je lek treće vrste?
c) Ako se prvi lek da 300 ljudi, oceniti verovatnoću da je lek efikasan za tačno 145 ljudi koristeći Stirlingovu formulu.

7.11 Autotomic Industries proizvodi dve vrste leka protiv bola koje ćemo, radi jednostavnosti, ovde zvati A i B. Tip A ublažava bol kod 40% pacijenata, dok tip B ublažava bol kod 20% pacijenata.

Pacijent uzima jedan od lekova protiv bolova (ne znaju koji tip) i ublažava im bol. Koja je verovatnoća da su koristili tip A?

7.12 Architas Manufacturing ima četiri fabrike za svoje nove laptopove. Svaki laptop proizveden ima male šanse za neuspeh. Fabrika 1 ima 0.03% šanse za neuspeh, Fabrika 2 ima 0.02% šanse, Fabrika 3 ima 0.07% šanse, a Fabrika 4 ima a 0.01% šanse.

a) Ako je jednako verovatno da laptop dolazi iz svake od četiri fabrike, kolika je ukupna šansa da je neispravan?

b) Ako je laptop neispravan, kolika je šansa da je proizveden u Fabrici 1?

c) Istraga otkriva da je neispravan laptop došao iz fabrika 1 ili 2. Kolika je sada verovatnoća da je proizveden u fabrici 1?

7.13 Opklade na crveno i crno na stolu za rulet isplaćuju se po jednakim kvotama, što znači da ako uložite x dolara i pobedite, dobijate nazad svoj ulog od x dolara plus još x dolara. Ako izgubite, onda gubite svoj ulog od x dolara.

Pretpostavimo da na ruletu 20 puta uzastopno stavljate isti ulog na crveno. Na točku američkog ruleta ima 38 polja od kojih su 18 crvena, a podjednako je verovatno da će loptica sleteti u bilo koje polje.

a) Nađite verovatnoću da nakon dvadesete ruke budete u plusu (dakle, imate više novca nego kada ste počeli).

b) Nađite verovatnoću da na kraju dvadesete ruke budete u minusu (imate manje novca nego kada ste počeli).

c) Nađite verovatnoću da ste na kraju dvadesete ruke na nuli.

7.14 Medicinski centar Happi Eies LASIK poseduje tri aparata za izvođenje operacije. Korišćenje prve mašine u hirurgiji rezultira uspešnom operacijom kod 95% pacijenata, druga je uspešna u 97% slučajeva, a treća mašina rezultira uspešnom operacijom u 99% slučajeva.

Dolaznim pacijentima se nasumično dodeljuje mašina za operaciju: 50% operiše se na prvom aparatu, dok 20% radi na drugom, a 30% na trećem.

a) S obzirom da operacija nije uspela za pacijenta, kolika je šansa da je urađena na prvom aparatu?

b) S obzirom na to da operacija nije uspela, a korišćena je ili prva ili druga mašina, kolika je šansa da je korišćena druga mašina?

7.15 Psihološki eksperiment pokušava da utvrdi da li umirujuća muzika pre ispita povećava rezultate testa za 10% ili više. Istraživači veruju da postoji šansa od 40% da će puštanje muzike poboljšati rezultate. Ako je njihova hipoteza tačna, a eksperiment izvode na 20 učenika, kolika je šansa da najmanje 10 učenika pokaže poboljšanje?

Glava 8

Gustine neprekidnih slučajnih promenljivih

Pitanje dana Neka je $T \sim \text{Exp}(3)$. Naći gustinu (pdf) i kumulativnu funkciju raspodele (cdf) za T.

Sažetak Neke slučajne promenljive imaju funkciju gustine verovatnoće, takođe poznatu i samo kao gustina ili pdf. Diskretna slučajna promenljiva X ima gustinu f u odnosu na meru prebrojavanja ako za sve prebrojive skupove A

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} f(a).$$

Neprekidna slučajna promenljiva X ima gustinu f u odnosu na Lebegovu meru ako za sve merljive A,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_{a \in A} f(a)\, dA.$$

I za diskretne i za neprekidne slučajne promenljive, kumulativna funkcija raspodele, ili cdf je definisana kao

$$F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a).$$

8.1 *Diferencijali*

Kada se bavimo neprekidnim slučajnim promenljivim, od pomoći je imati pojam diferencijala. Intuitivno, ako je data slučajna promenljiva t, diferencijal od t, napisan kao dt, je beskonačno mala promena u vrednosti promenljive t.

Diferencijali se mogu koristiti za postavke i izvoda i integrala. Izvod funkcije f koja preslikava promenljivu x u promenljivu y se često piše kao

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

što ukazuje da je derivat mala promena u y koja je rezultat male promene u x. Možemo pisati da je mala promena u y

$$dy = f(x + dx) - f(x),$$

što daje

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

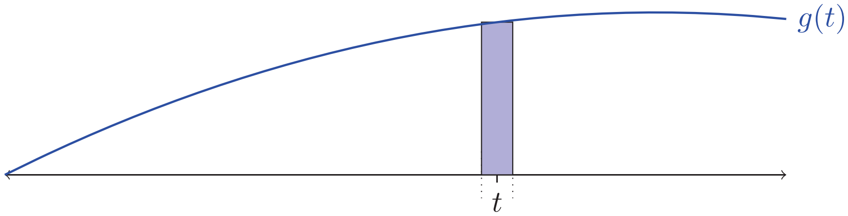
Ova vrsta jednačine iznad je neformalni način razmišljanja o izvodima. Postoji nekoliko načina da se ovo izrazi preciznije, a jedan od načina je korišćenjem limesa, u kom slučaju

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ovde h koji se približava nuli predstavlja zamenu za dx, beskonačno malu promenu u x.

Za primenu u integralima, diferencijal će takođe značiti mali interval ili skup koji okružuje t. To jest, koristi se dt za upućivanje na beskonačno mali interval oko promenljive t.

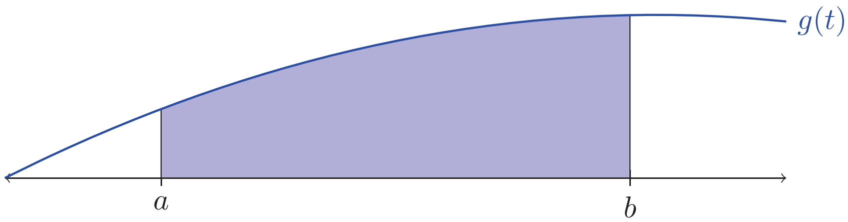
Ovim možemo stvoriti pojam *diferencijalnog pravougaonika* koji meri površinu ispod krive $g(t)$ koja leži u diferencijalnom intervalu dt oko t.



Površina diferencijalnog pravougaonika biće $g(t)\,dt$ pošto mu je visina $g(t)$ a širina dt.

Da bismo pronašli ukupnu površinu ispod krive od a do b, moramo da saberemo površine ispod svih diferencijalnih pravougaonika. Ovo se zove integracija (integral znači celina, a želimo celu oblast) i predstavljenje is izduženim slovom S kao simbolom za sumu:

$$\text{površina} = \int_{t=a}^{b} g(t)\,dt.$$



8.2 Diferencijali i verovatnoća

Napišimo $\mathbb{P}(X \in dt)$ da ukažemo na verovatnoću da slučajna promenljiva X spada u ovaj beskonačno mali skup dt oko t.

Onda da bi našli $\mathbb{P}(X \in A)$, integralimo $\mathbb{P}(X \in dt)$ za $t \in A$.

Primer 18
Neka je $\mathbb{P}(X \in dx) = 3x^2 \mathbb{1}(x \in [0,1])\,dx$. Naći $\mathbb{P}(X \in [0.4, 0.6])$.

Odgovor Ovo nas vodi do integrala

$$\mathbb{P}(X \in [0.4, 0.6]) = \int_{x=0.4}^{0.6} 3x^2 \mathbb{1}(x \in [0,1])\,dx = x^3|_{0.4}^{0.6} = \boxed{0.1520}.$$

U primeru primetimo da

$$\frac{\mathbb{P}(X \in dt)}{dt} = 3x^2 \mathbb{1}(x \in [0,1])$$

formira vrstu izvoda. Ovo je generalizacija izvoda i zove se Radon-Nikodimov izvod, ili poznatije kao *gustina*.

Naravno, pravilo ukupne verovatnoće i dalje mora važiti, dakle integraljenjem gustine preko $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ trebalo bi da se dobije 1.

Primer 19
Neka je $\mathbb{P}(X \in dx) = C \exp(-2x) \mathbb{1}(x \geq 0)\, dx$. Koliko je C?

Odgovor Ovde

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}} C \exp(-2x) \mathbb{1}(x \geq 0)\, dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} C \exp(-2x)\, dx \\
&= C \exp(-2x)/(-2)|_0^{\infty} \\
&= C/2.
\end{aligned}$$

So $C/2 = 1$, and $\boxed{C = 2}$.

Definicija 24
Reći ćemo da je f_X **gustina** (takođe **funkcija gustine verovatnoće** ili **pdf**[a]) za neprekidnu slučajnu promenljivu X ako za sve merljive skupove A,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_{s \in A} f(s)\, ds.$$

[a] *eng. probability density function*

Napomena Možda je najčešća zabuna u verovatnoći između pojmova *gustina* i *raspodela*. Raspodela slučajne promenljive je funkcija $\mathbb{P}_X$ koja mapira događaj A u $\mathbb{P}(X \in A)$. To jest, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$. Gustina X je drugačija funkcija f koja se može koristiti za izračunavanje raspodele korišćenjem integracije, ali to definitivno nisu iste funkcije!

Mešanje gustine i raspodele je kao mešanje *integranda*, što je funkcija $f(s)$ koja se integriše, i *integrala*, koji je $\int_A f(s)\, ds$. Ova razlika postaje važna kasnije u statistici, gde je raspodela *statistički model* dok je gustina *verodostojnost*.

8.3 cdf i gustina

Prisetimo se da je *kumulativna funkcija raspodele* ili *cdf*, slučajne promenljive Y

$$\mathrm{cdf}_Y(a) = F_Y(a) = \mathbb{P}(Y \leq a).$$

Činjenica 21
Ako je X neprekidna slučajna promenljiva, onda je njena kumulativna funkcija raspodele F_X, diferencijabilna svuda osim u prebrojivo mnogo tačaka. Štaviše, ako je

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

svuda gde je $F_X(x)$ difernecijabilna, onda je $f_X(x)$ gustina slučajne promenljive X.

Činjenica da je $F_X(x)$ diferencijabilna svuda osim na prebrojivom broju račaka je rezultat iz realne analize. Još jedan, takođe napredan, rezultat je da ako je $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ za sve skupove A oblika $(-\infty, a]$, tada X i Y imaju istu raspodelu. Ovo je poznato kao *Teorema Karateodorija*. Sa ove dve ideje činjenica može biti dokazana.

Dokaz. Neka je $A = (-\infty, a]$. Onda

$$\mathbb{P}(X \in A) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{a} F'_X(x)\, dx = \int_{-\infty} f_X(x)\, dx.$$

Dakle, $f_X(x)$ je gustina za slučajnu promenljivu čije verovatnoće na zatvorenim beskonačnim intervalima se poklapaju sa onima od X. Dakle, $f_X(x)$ je gustina za X. $\square$

Sa ovom činjenicom u ruci, može se odgovoriti na pitanje dana! Setimo se da slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom 3 ako

$$X = -\frac{1}{3}\ln(U),$$

gde je U uniformna na intervalu $[0, 1]$. Pošto $U \in (0, 1)$ sa verovatnoćom 1, $\ln(U)$ je negativno, i dakle sa verovatnoćom 1 je $X \geq 0$.

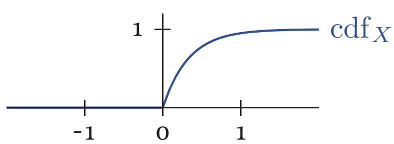
Dakle $\text{cdf}_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = 0$ za svako $a \leq 0$. Sad pretpostavimo da je $a > 0$. Onda

$$\begin{aligned}
\text{cdf}_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq a) \\
&= \mathbb{P}(-(1/3)\ln(U) \leq a) \\
&= \mathbb{P}(\ln(U) \geq -3a) \\
&= \mathbb{P}(U \geq \exp(-3a)),
\end{aligned}$$

što je $1 - \exp(-3a)$ jer za $a > 0$ $\exp(-3a) \in (0, 1)$. To znači da je

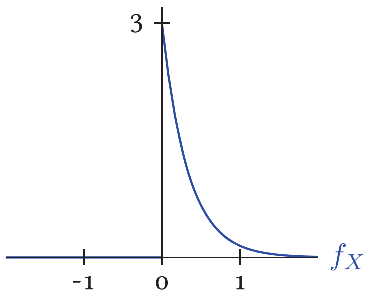
$$\boxed{\text{cdf}_X(a) = [1 - \exp(-3a)]\mathbb{1}(a \geq 0)}.$$

Grafik cdf izgleda ovako



Diferenciranje onda daje gustinu

$$\boxed{f_X(a) = 3\exp(-3a)\mathbb{1}(a \geq 0)}.$$



Napomene

- Pošto cdf $\mathbb{P}(X \in (-\infty, a])$ raste kako a raste, gustina (nagib) cdf-a je uvek nenegativan.
- Cdf je verovatnoća koja uvek leži između 0 i 1. Međutim, pdf je izvod ove funkcija, pa može biti veća od 1, kao u našem primeru.
- Za a i b, iskazi poput $\mathbb{P}(X \leq a)$ i $\mathbb{P}(X \geq b)$ nazivaju se *repovi* raspodela. Verovatnoća ovih repova mora težiti 0 za $a \to -\infty$ i $b \to \infty$. Što se tiče cdf-a, to znači

$$\lim_{a \to -\infty} \mathrm{cdf}_X(a) = 0, \ \lim_{a \to \infty} \mathrm{cdf}_X(a) = 1.$$

- Kada diferenciramo funkciju koja sadrži funkciju indikator, ona može biti dovedena ispred izvoda. To je zato što je izvod konstantne 0 funkcije 0, i izvod konstante 1 funkcije je 1 puta izvod ostalih činioca u funkciji.
- Funkcija $\mathrm{cdf}_X(a) = 3\exp(-3a)\mathbb{1}(a \geq 0)$ nema izvod na o, pošto postoji oštra krivina u funkciji. To je u redu: možete redefinisati (ili proizvoljno definisati) gustinu neprekidne slučajne promenljive na prebrojivom broju mesta bez promene raspodele funkcije koju predstavlja. To je zato što

$$\int_a^a f(s)\,ds = 0$$

  za svako a.
- To znači da gustina neprekidnih slučajnih promenljivih nije jedinstvena, postoji beskonačan broj funkcija f koje mogu biti gustina.

8.4 Normalizovanje gustina

Pretpostavimo da znamo samo gustinu do na normalizujuću konstantu. Na primer, pretpostavimo

$$f_X(s) = Cs^2\mathbb{1}(s \in [0, 1]).$$

Možemo li da nađemo konstantu C?

Da! Koristeći sledeću činjenicu

Činjenica 22
Za neprekidnu slučajnu promenljivu X sa gustinom f_X,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,ds = 1.$$

Dokaz. Primetimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,ds = \mathbb{P}(X \in (-\infty, \infty) = 1.$$

□

Primer 20
Neka X ima gustinu $f_X(s) = Cs^2 \mathbb{1}(s \in [0,1])$. Naći C.

Rešenje Primetimo

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} Cs^2 \mathbb{1}(s \in [0,1])\,ds \\ &= C \int_0^1 s^2\,ds \\ &= C \cdot \left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 \\ &= C/3. \end{aligned}$$

Dobijamo da $\boxed{C = 3}$.

8.5 Skaliranje i pomeranje slučajnih promenljivih

Često moramo da pomeramo (šiftujemo, transliramo) slučajne promenljive i da ih rastežemo (skaliramo) kako bismo bolje modelirali naše potrebe

Definicija 25
Za slučajnu promenljivu A, kažemo da je $B = a + bA$ **pomerena** za a i **skalirana** za b.

Kako to utiče na gustinu? Na prilično direktan način.

Činjenica 23
Neka X ima gustinu $f_X(s)$ u odnosu na Lebegovu meru. Onda za svako $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$,

$$f_{aX+b}(s) = |1/a| f_X((s-b)/a).$$

Dokaz. Nađimo cdf od $aX + b$. Prvo uzmimo $a > 0$.

$$\mathrm{cdf}_{aX+b}(s) = \mathbb{P}(aX + b \leq s) = \mathbb{P}(X \leq (s-b)/a) = \mathrm{cdf}_X((s-b)/a).$$

Diferenciranjem dobijamo željeni rezultat.
Slično za slučaj $a < 0$. □

Zadaci

8.1 Neka je $X = \sqrt{U}$ gde $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$. Naći gustinu za X.

8.2 Pretpostavimo da X ima gustinu $f_X(s) = (x^2/9)\mathbb{1}(x \in [0,3])$.

a) Nađite $\mathbb{P}(X \in [0,1])$.

b) Nađite vrednost m takvu da važi $\mathbb{P}(X \leq m) = 0.5$. (Takva vrednost m se naziva *medijana* raspodele X ili jednostavno medijana X).

8.3 Neka je $f_X(s) = \exp(-s)[1 - \exp(-2)]^{-1}\mathbb{1}(s \in [0,2])$.

a) Koliko je $\mathbb{P}(X \geq 1.1)$?

b) Koliko je $\mathbb{P}(X \leq -0.5)$?

c) Nacrtajte grafik F_X.

8.4 Prosečna težina pilića (u kg) na farmi živine modelovana je gustinom

$$f(s) = 25(x - 1.8)\mathbb{1}(x \in [1.8, 2]) + 25(2.2 - x)\mathbb{1}(x \in [2, 2.2])$$

a) Koja je verovatnoća da pile teži više od 2.1 kilograma?

b) Koja je verovatnoća da pile teži više od 2.5 kilograma?

8.5 Pretpostavimo da W ima gustinu $f_W(x) = 3x^2\mathbb{1}[x \in [0,1])$. Koja je gustina za $Y = 3W + 2$?

8.6 Neka U ima raspodelu $\mathsf{Unif}([-1,1])$.

a) Naći gustinu za U.

b) Naći gustinu za $-2U + 1$.

8.7 Neka X ima gustinu $f_X(x) = C/(1 + x^2)$. Šta je C?

8.8 Neka je $\mathbb{P}(Y \in dy) = Cy\exp(-2y)\mathbb{1}(y \geq 0)\, dy$. Šta je C?

8.9 Pretpostavimo $f_T(t) = 2\exp(-2t)\mathbb{1}(t \geq 0)$. Naći gustinu za $2T + 1$.

8.10 Pretpostavimo $f_Z(z) = \tau^{-1/2}\exp(-z^2/2)$. Za $\sigma > 0$ i $\mu \in \mathbb{R}$, naći gustinu za

$$\mu + \sigma Z.$$

8.11 Neka je $U \sim \mathsf{Unif}([-2,2])$.

a) Neka je $T = U^3$. Koju gustinu ima T?

b) Neka je $V = U^4$. Koju gustinu ima V?

8.12 Pretpostavimo da $U \sim \mathsf{Unif}([-\tau/2, \tau/2])$ i $X = \arctan(U)$. Naći gustinu za X.

8.13 Pokazati da ako T ima eksponencijalu raspodelu sa stopom λ, tada $\lfloor T \rfloor + 1$ ima geometrijsku raspodelu i pronađite parametar p kao funkciju od λ.

8.14 Pokazati da ako T ima eksponencijalu raspodelu sa stopom λ i $\alpha > 0$ onda $\alpha T \sim \mathsf{Exp}(\lambda/\alpha)$.

Glava 9

Gustine diskretnih slučajnih promenljivih

Pitanje dana Neka je $U \sim \text{Unif}(\{1, 2, 3, 4\})$. Naći gustinu i kumulativnu funkciju raspodele za U.

Sažetak Za diskretnu slučajnu promenljivu X, gustina je data kao $f_X(i) = \mathbb{P}(X = i)$. Gustina je data u odnosu na meru prebrojavanja. Međutim, dok se gustina neprekidne slučajne promenljive naziva funkcija gustine verovatnoće ili pdf, gustina diskretne slučajne promenljive se često naziva funkcija mase verovatnoće ili pmf umesto toga. Funkcija raspodele za X je definisana na isti način kao za neprekidne slučajne promenljive:

$$\mathrm{cdf}_X(a) = F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a).$$

U poslednjoj sekciji uveden je pojam gustina kao izvod verovatnoće u odnosu na Lebegovu meru. Ovo se odnosi na neprekidne slučajne promenljive.

$$\frac{\mathbb{P}(X \in ds)}{ds} = f_X(s).$$

Kakva je situacija kada je slučajna promenljiva diskretna?

Uzmimo konkretan primer i pretpostavimo sledeće

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.2,\ \mathbb{P}(X = 1) = 0.3,\ \mathbb{P}(X = 2) = 0.5. \tag{9.1}$$

Sada dodajmo tanušan infinitezimalni interval oko tačke 2. Tada bez obzira koliko je taj interval mali, verovatnoća da X upadne u taj interval je 0.5. Dakle $\mathbb{P}(X \in ds) = 0.5$ za $s = 2$.

Slično i za $s = 2.4$, za infinitezimalno mali interval oko 2.4, verovatnoća je 0 da X upadne u taj interval. Generalno, imamo

$$\mathbb{P}(X \in ds) = \mathbb{P}(X = s).$$

Šta sa ds? ds samo sadrži s u diskretnoj meri i mera prebrojavanja skupa $\{s\}$ je tačno 1. Dakle

$$\frac{\mathbb{P}(X \in ds)}{ds} = \frac{\mathbb{P}(X = s)}{1} = \mathbb{P}(X = s)$$

kada radimo sa diskretnim slučajnim promenljivim.

Definicija 26
Za diskretnu slučajnu promenljivu X **gustina** (takođe **pdf** ili funkcija mase verovatnoće ili **pmf**[a]) je

$$f_X(i) = \mathbb{P}(X = i).$$

[a] *eng. probability mass function*

Imajte na umu da za neprekidne slučajne promenljive imamo samo termin funkcija gustine verovatnoće, ili pdf za gustinu, ali i za diskretne raspodele ponekad je nazvana funkcija mase verovatnoće ili pmf. Ovo potiče od posmatranja jedne jedinice verovatnoće kao jedne jedinice mase, recimo jedan kilogram gline. Ova masa se zatim razbija i raspoređuje na moguće vrednosti koje ostvaruje slučajna promenljiva.

Za slučajnu promenljivu X definisanu u (9.1), gustina će biti

$$f_X(i) = 0.2\mathbb{1}(X = 0) + 0.3\mathbb{1}(X = 1) + 0.5\mathbb{1}(X = 2).$$

U pitanju dana, možemo napisati gustinu za $U \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4\})$ kao

$$f_U(i) = (1/4)\mathbb{1}(i \in \{1, 2, 3, 4\})$$

jer su sve verovatnoće jednake.

9.1 CDF za diskretne slučajne promenljive

Cdf za diskretne slučajne promenljive definisana je na identičan način kao za neprekidne

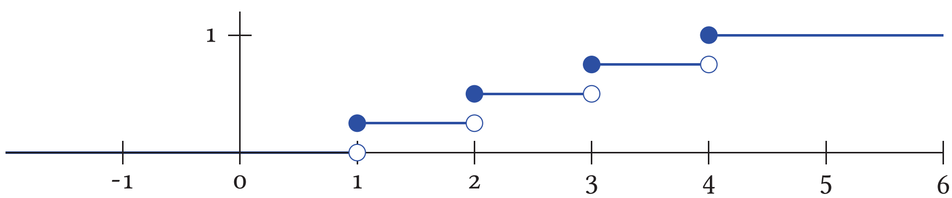
$$\text{cdf}_X(a) = F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a).$$

Razlika je u tome što dok je cdf za neprekidne sl. prom. neprekidna f-ja, za diskretne ona ima skokove.

Uzmimo opet $U \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4\})$. Za $a < 1$, $\mathbb{P}(U \leq a < 1) = 0$, tako da cdf ostaje ravna u 0. Ali kad je $a = 1$, $\mathbb{P}(U \leq 1) = 1/4$. Postoji skok od $1/4$ u $a = 0$.

Onda $\mathbb{P}(U \leq 1.1) = \mathbb{P}(U \leq 1.5) = \mathbb{P}(U \leq 1.9999) = 1/4$: cdf ostaje ravna dok ne dođemo do $a = 2$, gde postaje $\mathbb{P}(U \leq 2) = (1/4) + (1/4) = 1/2$. Opet imamo skok od $1/4$.

Grafik izgleda ovako.



Popunjeni kružić pokazuje koja je vrednost funkcije na mestu skoka. Tako u tački 2, popunjeni kružić je na visini 0.5 a prazan kružić na visini 0.25. Znači vrednost f-je u toj tački je 0.5.

Ako imamo cdf, kako odatle da nađemo $\mathbb{P}(X = a)$? To je zapravo samo dužina skoka f-ju u tački a. Za neprekidne slučajne promenljive cdf je neprekidna i svi tzv. „skokovi" su nule. Generalno, ovako to možemo da izračunamo.

Činjenica 24
Za slučajnu promenljivu X sa funkcijom raspodele F_X,

$$\mathbb{P}(X = s) = F_X(s) - \lim_{h \to 0} F_X(s - |h|).$$

Šiftovanje i skaliranje funkcionišu malo drugačije za gustine diskretnih slučajnih promenljivih.

Činjenica 25
Neka X ima gustinu $f_X(s)$ u odnosu na meru prebrojavanja. Onda za svako $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$,

$$f_{aX+b}(s) = f_X((s-b)/a).$$

Dokaz. Ovde

$$f_{aX+b}(s) = \mathbb{P}(aX+b=s) = \mathbb{P}(X=(s-b)/a) = f_X((s-b)/a).$$

□

Primetimo da nema faktora $|1/a|$ kao sa slučajem Lebegove mere.

9.2 Funkcija maksimuma i cdf's

Uzmimo nezavisne slučajne promenljive X i Y sa funkcijama raspodele F_X i F_Y. Koja je cdf od $\max\{X,Y\}$?

Razmotrimo specijalni slučaj: da bi bilo $\max\{X,Y\} \leq 3$, obe X i Y moraju da budu najviše 3. To se dešava sa verovatnoćom $\mathrm{cdf}_X(3)\,\mathrm{cdf}_Y(3)$. Drugim rečima, za operator maksimuma, cdf je proizvod cdf-ova pojedinačnih slučajnih promenljivih.

Činjenica 26
Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive. Tada

$$\mathrm{cdf}_{\max\{X,Y\}}(a) = \mathrm{cdf}_X(a)\,\mathrm{cdf}_Y(a).$$

A šta da radimo u slučaju minimuma? Onda koristimo da

$$\mathbb{P}(\min\{X,Y\} > a) = \mathbb{P}(X > a)\mathbb{P}(Y > b).$$

Definicija 27
Funkcija $S_X(t) = \mathbb{P}(X > t)$ se zove **funkcija preživljavanja** za X.

Zove se funkcija preživljavanja jer ako X meri koliko vremena objekat traje (preživi) pre nego što se pokvari, $S_X(t)$ meri verovatnoću da taj objekat živi duže od vremena t.

Činjenica 27
Za nezavisne slučajne promenljive X i Y,

$$S_{\min\{X,Y\}}(t) = S_X(t)S_Y(t).$$

9.3 Medijana i Modus

Bilo da se radi o neprekidnoj ili diskretnoj gustini, interesuju nas neke istaknute vrednosti.

Za slučajnu promenljivu X, *medijana* je vrednost m takva da su $\mathbb{P}(X \leq m)$ i $\mathbb{P}(X \geq m)$ obe bar $1/2$.

Definicija 28
Slučajna promenljiva X ima **medijanu** m ako je $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$ i $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$. Skup medijana m zove se **medijalni skup**.

Činjenica 28
Ako X ima neprekidnu cdf funkciju onda se medijalni skup sastoji od rešenja $\operatorname{cdf}_X(m) = 1/2$.

Ovo dovodi do sledećeg odnosa prema gustinama.

Činjenica 29
Ako X ima gustinu $f_X(s)$ u odnosu na μ, onda bilo koje rešenje

$$\int_{-\infty}^{m} f_X(s)\, d\mu = \frac{1}{2}.$$

je medijana.

Primer 21
Neka $X \sim \text{Unif}(\{1,2,3,4,5\})$. Onda je 3 jedina medijana za X (ovde $\mathbb{P}(X \geq 3) = 0.6 = \mathbb{P}(X \leq 3)$.)

Neka $Y \sim \text{Unif}(\{1,2,3,4\})$ onda je bilo koje $m \in [2,3]$ medijana za Y.

Drugo mesto od interesa za gustinu je ono gde je gustina što je moguće veća. Ovo se zove *modus* gustine.

Definicija 29
Modalni skup gustine $f(x)$ je $\arg\max(f(x))$. Elementi ovog skupa zovu se **modusi**.

Drugim rečima, skup modusa je skup argumenata x gde je funkcija $f(x)$ što je moguće veća.

Primer 22
Neka $X \in \{1,2,\ldots\}$ ima gustinu $f(i) = (24/\tau^2)i^{-2}$. Naći modus.

Reši Pošto je $(24/\tau^2)i^{-2}$ strogo opadajuća za $i \in \{1,2,\ldots\}$, da bi našli modus moramo tražiti za najmanje moguće i, koje u ovom slučaju čini skup modusa $\boxed{\{1\}}$.

Sada za neprekidni slučaj.

Primer 23
Naći modus(e) funkcije $f(x) = x\exp(-x)\mathbb{1}(x \geq 0)$.

Rešenje Za $x < 0$, $f(x) = 0$, tako da tu nema modusa.

$$[x\exp(-x)]' = x'\exp(-x) + x[\exp(-x)]' = (1-x)\exp(-x),$$

ima jedinstveno rešenje u $x = 1$. Pošto je $f'(x) < 0$ za $x > 1$ i $f'(x) > 0$ za $x < 1$, ova kritična tačka je globalni maksimum na intervalu $(0, \infty)$, i skup modusa je jednak $\boxed{\{1\}}$.

Nažalost, nisu sve gustine svuda diferencijabilne. Zapravo, nisu sve gustine ni svuda neprekidne!

Primer 24
Naći modus od X gde $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$.

Rešenje Gustina za X je $\lambda\exp(-\lambda s)\mathbb{1}(s \geq 0)$. Kada $s < 0$, $f_X(s) = 0$. Za $s > 0$, $[f_X(x)]' = -\lambda^2\exp(-\lambda s) < 0$. Dakle, $f_X(x)$ je opadajuća na $[0, \infty)$, i $\arg\max f_X(x) = \boxed{\{0\}}$, i to je jedini modus.

Imajte na umu da ako malo promenimo gustinu na $g(x) = \lambda\exp(-\lambda s)\mathbb{1}(s > 0)$, raspodela je nepromenjena. Međutim, ova gustina nema modus! U $x = 0$ imamo $g(0) = 0$, ali $g(x)$ postaje veća i veća kad prilazimo nuli zdesna. Dakle, tehnički g nema maksimalnu vrednost, tako da ne postoji modus za ovu gustinu. Dakle, za razliku od srednje vrednosti, ili medijane slučajne promenljive, modus nije funkcija raspodele, ali jeste funkcija gustine.

Zadaci

9.1 Za X sa gustinom $f_X(i) = 0.3\mathbb{1}(i = 1) + 0.7\mathbb{1}(i = 4)$, koliko je $\mathbb{P}(X \leq 2)$?

9.2 Pretpostavimo da je $f_X(i) = 0.3\mathbb{1}(i = 2) + 0.2\mathbb{1}(i = 4) + 0.5\mathbb{1}(i = 5)$.

a) Koliko je $\mathbb{P}(X \geq 2.5)$?
b) Skicirajte grafik f-je raspodele od X.

9.3 Neka su U_1 i U_2 iid $\mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4\})$. Naći gustinu za $U_1 + U_2$.

9.4 Neka su U_1, U_2, U_3 iid $\mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$, i $X = \max\{U_1, U_2, U_3\}$.

a) Naći $\text{cdf}_F(a)$.
b) Koliko je $\mathbb{P}(X = 4)$?

9.5 Pretpostavimo da $X \sim \mathsf{Unif}(\{1, \ldots, 10\}$. Koji je skup modusa za X?

9.6 Pretpostavimo da X ima gustinu

$$f_X(i) = 0.3\mathbb{1}(i = 1) + 0.4\mathbb{1}(i = 7) + 0.3\mathbb{1}(i = 10).$$

Naći skup modusa za X.

9.7 Pretpostavimo da X ima gustinu $x^2\exp(-x)\mathbb{1}(x \geq 0)$. Naći modus(e) za X.

9.8 Pretpostavimo da Y ima gustinu $105x^2(1-x)^4\mathbb{1}(x \in [0,1])$. Naći modus(e) za Y.

9.9 Pretpostavimo da su $X \sim \mathsf{Exp}(1)$ i $Y \sim \mathsf{Exp}(2)$ nezavisni.

a) Naći funkciju preživljavanja za X.

b) Naći funkciju preživljavanja za Y.

c) Naći $\mathbb{P}(\min(X,Y) \geq 2)$.

9.10 Neka su U_1, U_2, U_3 iid $\mathsf{Unif}([0,1])$. Naći f-ju raspodele za $\min(U_1, U_2, U_3)$.

Glava ***10***

Srednja vrednost slučajne promenljive

Pitanje dana Koja je prosečna vrednost slučajne promenljive koja je jednaka 2 sa verovatnoćom 0.3, 3 sa verovatnoćom 0.5, i 6 sa verovatnoćom 0.2?

Sažetak Za neke slučajne promenljive, kada uzmete prosek uzorka mnogih nezavisnih uzorkovanja iz iste raspodele, on konvergira realnom broju koji se zove **srednja vrednost**, **prosek**, **očekivanje**, ili **očekivana vrednost** slučajne promenljive. Kada je X diskretna sa gustinom f_X, srednja vrednost je definisana kao

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{a \in A} a f_X(a).$$

Jaki zakon velikih brojeva kaže da za slučajnu promenljivu X sa $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ važi,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mathbb{E}[X]\right) = 1.$$

Uzmimo slučajnu promenljivu B sa raspodelom $\mathsf{Bern}(p)$, koja uzima vredmost 1 sa verovatnoćom p, i 0 sa verovatnoćom $1 - p$.

Neka su sada $B_1, B_2, \ldots$ niz iid promenljivih sa istom raspodelom kao B. Posmatrajmo onda *uzorački prosek* prvih n vrednosti:

$$S_n = \frac{B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n}{n}.$$

Zbir $B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ broji koliko ima 1-ica među prvih n promenljivih. Na primer, $1 + 0 + 0 + 1 + 0 = 2$, pošto ima 2 jedinice među $(1, 0, 0, 1, 0)$.

Iz našeg intuitivnog razumevanja verovatnoće, čini se razumnim da ovaj prosek uzorka treba da konvergira vrednosti p. Jedno od velikih otkrića u verovatnoći bilo je kada je Jakob Bernuli 1713. dokazao da je ova intuicija tačna: S_n konvergira, u nekom smislu, ka p. Ovaj rezultat je bio toliko važan da su Bernuli slučajne promenljive tako nazvane u njegovu čast. Danas imamo još jaču verziju njegovog rezultata.

Činjenica 30
Za $B_1, B_2, \ldots$ iid niz $\mathsf{Bern}(p)$ slučajnih promenljivih,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}{n} = p\right) = 1.$$

Ova ideja se može koristiti za definisanje *očekivane vrednosti* Bernulijeve slučajne promenljive.

Definicija 30
Očekivana vrednost (ili **očekivanje** ili **srednja vrednost** ili **prosek** od $B \sim \mathsf{Bern}(p)$ je $\mathbb{E}[B] = p$.

Matematički, limes je primer *linearnog operatora*.

Definicija 31
Za vektorski prostor V sa skalarima S, reći ćemo da je $\mathcal{L}$ **linearni operator** ako za svako $v, w \in V$ i $s, t \in S$ važi,

$$\mathcal{L}(sv + tw) = s\mathcal{L}(v) + t\mathcal{L}(w).$$

Neki primeri lineranih operatora:

- **Proizvod matrica-skalar** Ovde su vektori tačke $v \in \mathbb{R}^n$, i $\mathcal{L}(v) = Av$ za neku matricu A. Onda za realne s, t i vektore v i w važi,

$$\mathcal{L}(sv + tw) = A(sv + tw) = s(Av) + t(Aw) = s\mathcal{L}(v) + t\mathcal{L}(w).$$

- **Diferencijacija** Ovde su vektori difernecijabilne funkcije, a skalari realni brojevi, i

$$[sf + tg]' = sf' + tg'.$$

- **Integracija** Ovde su vektori integrabilne funkcije, skalari realni brojevi, i

$$\int_{x\in A} [sf + tg](x)\, dx = s \int_{x\in A} f(x)\, dx + t \int_{x\in A} g(x)\, dx.$$

- **Limesi nizova** Ovde su vektori nizovi, skalari su realni brojevi, i ukoliko nizovi $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ imaju limese, onda

$$\lim_{n\to\infty} (sa_n + tb_n) = s \lim_{n\to\infty} a_n + t \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Neka je $A \sim \mathsf{Bern}(p)$ i $B \sim \mathsf{Bern}(q)$. Neka su $A_1, A_2, \ldots \sim A$ iid i $B_1, B_2, \ldots \sim B$ iid. Ali za svako i, A_i i B_i ne moraju biti nezavisne jedne od drugih.

Na primer, neka su $U_1, U_2, \ldots$ iid $\mathsf{Unif}([0,1])$. Tada ako $A_i = \mathbb{1}(U_i \leq 0.2)$ onda $A_i \sim \mathsf{Bern}(0.2)$. Ako $B_i = \mathbb{1}(U_i \leq 0.3)$ onda $B_i \sim \mathsf{Bern}(0.3)$. Mađutim, A_i i B_i *nisu* nezavisne, pošto ako je $A_i = 1$ onda B_i takođe mora biti 1.

Neka je $C_i = A_i + B_i$, i razmatrajmo limes uzoračkih proseka od niza C_i. Onda

$$\begin{aligned}\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} &= \frac{A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \cdots + A_n + B_n}{n} \\ &= \frac{A_1 + \cdots + A_n}{n} + \frac{B_1 + \cdots + B_n}{n}.\end{aligned}$$

Uzmimo limes kad n teži beskonačnosti

$$\lim n \to \infty \frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = p + q$$

sa verovatnoćom 1.

Ovo utvrđuje korisnu činjenicu o očekivanoj vrednosti koju ćemo koristiti uvek iznova: očekivana vrednost je takođe linearni operator.

Definicija 32
Reći ćemo da je slučajna promenljiva **integrabilna** ako ima konačno očekivanje.

Činjenica 31
Posmatrajmo skup integrabilnih slučajnih promenljivih kao vektore, i neka su realni brojevi skalari. Onda je očekivana vrednost jedan linearni operator.

Dakle za svake dve slučajne promenljive X i Y i skalare a i b,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Na primer, ovo nam omogućava da pronađemo očekivanu vrednost binomne slučajne promenljive.

Činjenica 32
Za $X \sim \mathsf{Bin}(n, p)$, $\mathbb{E}[X] = np$.

Dokaz. Za $B_1, \ldots, B_n$ iid $\mathsf{Bern}(p)$,

$$B = B_1 + \cdots + B_n \sim \mathsf{Bin}(n, p).$$

Uzimajući očekivanja obe strane dobijamo

$$\mathbb{E}[B] = \mathbb{E}[B_1] + \cdots + \mathbb{E}[B_n] = p + \cdots + p = np.$$

$\square$

Za pitanje dana, da bismo koristili naše pravilo o Bernulijevim slučajnim promenljivim, moramo napisati X kao zbir slučajnih promenljivih indikatora. To je vrlo lako učiniti!

Za $X \in \{2, 3, 6\}$,

$$X = 2\mathbb{1}(X = 2) + 3\mathbb{1}(X = 3) + 6\mathbb{1}(X = 6).$$

Na primer kada je $X = 3$, dobijamo 3 na levoj strani izraza i $(2)(0) + (3)(1) + (6)(0) = 3$ na desnoj strani izraza. Slučajevi $X = 2$ i $X = 6$ su slični.

Sada uzmimo očekivanje od obe strane:

$$\mathbb{E}[X] = 2\mathbb{E}[\mathbb{1}(X = 2)] + 3\mathbb{E}[\mathbb{1}(X = 3)] + 6\mathbb{E}[\mathbb{1}(X = 6)].$$

Srednja vrednost indikatorske funkcije je verovatnoća da je indikatorska funkcija jednaka 1. Tako, na primer, $\mathbb{E}[\mathbb{1}(X = 2)] = \mathbb{P}(X = 2) = 0.3$.

Dakle

$$\mathbb{E}[X] = 2\mathbb{P}(X = 2) + 3\mathbb{P}(X = 3) + 6\mathbb{P}(X = 6) = 2(0.3) + 3(0.5) + 6(0.2) = 3.3.$$

Ovaj postupak bi se mogao pratiti svaki put kada je potrebno izračunati očekivanu vrednost. Ali ova ideja se može lako generalizovati i inspiriše našu definiciju očekivane vrednosti.

Definicija 33
Neka Ω zadovoljava $\sum_{x\in\Omega}\mathbb{P}(X=x)=1$. Onda **očekivana vrednost** (ili **srednja vrednost**, **prosek**, **očekivanje**) od X je

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in\Omega}x\mathbb{P}(X=x)$$

ako ti limesi postoje.

Notacija 4
Ovo takođe možemo napisati kao integral u odnosu na meru prebrojavanja.

$$\sum_{x\in\Omega}x\mathbb{P}(X=x)=\int_{x\in\Omega}x\mathbb{P}(X\in x)\,d\#=\int_{x\in\Omega}x\mathbb{P}(X\in dx).$$

Činjenica da su limesi uzoračkih proseka jednaki očekivanoj vrednosti slučajne promenljive se naziva Jaki zakon velikih brojeva.

Teorema 2 (Jaki zakon velikih brojeva)
Neka X ima konačno očekivanje i neka je $X_1, X_2, \ldots \sim X$ iid niz. Onda je

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}=\mathbb{E}[X]\right)=1.$$

Napomene:

- Ništa nije rečeno o tome koliko brzo uzorački prosek konvergira očekivanoj vrednosti. Može biti veoma sporo ili veoma brzo. O tome ćemo više saznati kasnije kada budemo proučavali varijansu slučajne promenljive.

- Konvergencija se dešava samo sa verovatnoćom 1. To znači da postoje nizovi gde se konvergencija ne dešava. Ali verovatnoća da će se desiti bilo koji od ovih neobičnih nizova je nula.

- Na primer, pretpostavimo da imamo slučajnu promenljivu $X \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4,5,6\})$. Razmotrimo iid niz bacanja kockica $X_1, X_2, \ldots$ gde $X_i \sim X$ za sve i. Jedan mogući niz bacanja kockica je $1,3,1,3,1,3,1,3,\ldots$. Za ovaj niz, prosek uzorka konvergira ka 2 a ne ka 3.5. Ali verovatnoća da se dobije baš ovaj niz je 0. Jaki zakon velikih brojeva kaže da kada saberemo sve nizove gde prosek uzorka ne konvergiraju ka 3.5, ukupna verovatnoća svih tih loših nizova je još uvek 0.

10.1 Simetrija

Još jedno korisno svojstvo srednjih vrednosti je da ako je gustina simetrična u odnosu na neki broj, srednja vrednost slučajne promenljive je jednaka tom broju.

Definicija 34
Funkcija f je **simetrična** oko m ako

$$(\forall\delta\in\mathbb{R})(f(m+\delta)=f(m-\delta)).$$

Na primer, $f(x) = (b-a+1)^{-1}\mathbb{1}(x \in \{a, a+1, \ldots, b\}$ je simetrična oko $(a+b)/2$. Primetimo da ako je $(a+b)/2$ ceo broj onda $f(m+\delta)$ i $f(m-\delta)$ su oba 1 ako i samo ako δ je ceo broj ne veći od $(b-a)/2$. Ako $(a+b)/2$ nije ceo broj, onda $f(m+\delta)$ i $f(m-\delta)$ su oba 1 ako i samo ako $\delta = k/2$ gde je k ceo broj ne veći od $b-a$.

Definicija 35
Slučajna promenljiva je **simetrična** oko m ako X i $2m-X$ (što je isto kao $m-(X-m)$) imaju istu raspodelu.

Činjenica 33
Ako slučajna promenljiva X ima gustinu simetričnu oko m onda je X simetričnu oko m.

Dokaz. Pokazaćemo da imaju iste funkcije raspodele. Neka je $a \in \mathbb{R}$. Onda

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq a) &= \sum_{s \leq a} f_X(s) \\
&= \sum_{s \leq a} f_X(s+m-m) \\
&= \sum_{s \leq a} f_X(m+(s-m)) \\
&= \sum_{s \leq a} f_X(m-(s-m)) && \text{zbog simetrije} \\
&= \sum_{s \leq a} f_X(2m-s) \\
&= \mathbb{P}(2m-X \leq a).
\end{aligned}$$

□

Sada možemo koristiti linearnost da pokažemo da integrabilna simetrična slučajna promenljiva ima očekivanje jednako centru simetrije.

Činjenica 34
Neka je X integrabilna slučajna promenljiva, simetrična oko m. Onda

$$\mathbb{E}[X] = m.$$

Dokaz. Po linearnosti

$$2m = \mathbb{E}[2m] = \mathbb{E}[X + 2m - X] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[2m - X].$$

Pošto je X simetrična, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[2m-X]$. Dakle $2m = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] \Rightarrow \mathbb{E}[X] = m$. □

Iz ovog, konkretno, dobijamo očekivanje za diskretnu uniformnu raspodelu

Činjenica 35
Za $U \sim \mathsf{Unif}(\{a, a+1, \ldots, b\})$, $\mathbb{E}[U] = (a+b)/2$.

Imajte na umu da ovo pravilo simetrije funkcioniše samo ako je slučajna promenljiva integrabilna. Pogledajmo $R \in \{\ldots, -2, -1\} \cup \{1, 2, 3, \ldots\}$ gde

$$\mathbb{P}(R = i) = (3/\pi^2)|i|^{-2}.$$

Očekivanje od R ne postoji iako je R simetrična oko 0.

Zadaci

10.1 Dato da je $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.4$ i $\mathbb{P}(Y = -1) = 0.6$, koliko je $\mathbb{E}[Y]$?

10.2 Recimo da je $\mathbb{P}(R = 0) = 0.3$, $\mathbb{P}(R = 2) = 0.45$ i $\mathbb{P}(R = 3) = 0.25$. Koliko je $\mathbb{E}[R]$?

10.3 Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X = 2) = 0.3$, $\mathbb{P}(X = 4) = 0.2$ i $\mathbb{P}(X = 5) = 0.5$. Koliko je $\mathbb{E}[X]$?

10.4 Neka W ima gustinu

$$W = (1/10)\mathbb{1}(i \in \{1, 2, 3, 4\}) + (2/10)\mathbb{1}(i \in \{5, 6, 7\}).$$

Koliko je $\mathbb{E}[W]$?

10.5 Neka je $\mathbb{E}[X] = 34$. Koliko je $\mathbb{E}[2X - 5]$?

10.6 Neka je $\mathbb{E}[X] = 2$. Koliko je $\mathbb{E}[15 - 5X]$?

10.7 Uzmimo da je $X \sim \textsf{Unif}(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$. Koliko je $\mathbb{E}[X]$?

10.8 Neka je $\mathbb{P}(X = 0) = 0.15$, i $\mathbb{P}(X = 2) = 0.65$, $\mathbb{P}(X = 7) = 0.2$. Koliko je $\mathbb{E}[X]$?

10.9 Recimo da je $\mathbb{E}[R] = 3$ i $\mathbb{E}[S] = 6$. Koliko je $\mathbb{E}[R - S]$?

10.10 Ako je $\mathbb{E}[Z_1] = \mu_1$ i $\mathbb{E}[Z_2] = \mu_2$, koliko je $\mathbb{E}[2Z_1 + 4Z_2]$?

10.11 Uzmimo $U_1, U_2, \ldots \sim \textsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4\})$. Pokazati da je $\lim_{n\to\infty}(U_1 + \cdots + U_n)/n = 2.5$ sa verovatnoćom 1.

10.12 Neka je $\mathbb{P}(X = i) = (6/\pi^2)i^{-2}$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Pokazati da X nije integrabilna.

Glava 11

Očekivana vrednost opšte slučajne promenljive

Pitanje dana Neka je $T \sim \mathsf{Exp}(4.5)$. Koja je prosečna vrednost od T, koja se obeležava sa $\mathbb{E}[T]$?

Sažetak **Očekivana vrednost** realne funkcije g od realne slučajne promenljive X je

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{a \in \mathbb{R}} g(a)\mathbb{P}(X \in da).$$

Za X sa gustinom $f_X(s)$ u odnosu na Lebegovu meru, ovo znači

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{a \in \mathbb{R}} g(a) f_X(a)\, da,$$

a ako je gustina u odnosu na meru prebrojavanja,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_a g(a) f_X(a).$$

Osnovni **Monte Karlo** algoritmi rade tako što konstruišu slučajnu promenljivu čije je očekivanje vrednost koja nas interesuje, a zatim simulira tu slučajnu promenljivu više puta i usrednjava rezultate.

11.1 *Integrali u odnosu na Lebegovu meru i meru prebrojavanja*

Za slučajnu promenljivu X i događaj A,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}(X \in A)] = \int_{a \in \Omega} \mathbb{1}(a \in A)\mathbb{P}(X \in da).$$

Primetimo da je operator $\mathbb{E}$ funkcija slučajne promenljive, naime, $\mathbb{1}(X \in A)$. U integralu, funkcija promenljive po kojoj integralimo a je ista funkcija. Ovo daje $\mathbb{1}(a \in A)$ unutar integrala.

Ispostavlja se da ovaj metod pretvaranja očekivane vrednosti u integral važi i za bilo koju drugu funkciju! Na primer,

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{a\in\mathbb{R}} a^2 \mathbb{P}(X \in da)$$
$$\mathbb{E}[X] = \int_{a\in\mathbb{R}} a \mathbb{P}(X \in da)$$
$$\mathbb{E}[\sin(X)] = \int_{a\in\mathbb{R}} \sin(a) \mathbb{P}(X \in da).$$

Kada X ima gustinu $f_X(a)$ u odnosu na meru prebrojavanja, integral se pretvara u sumu:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{a\in\mathbb{R}} g(a)\mathbb{P}(X \in da) = \sum_a g(a) f_X(a)$$

Kada X ima gustinu $f_X(a)$ u odnosu na Lebegovu meru, integral je klasični Rimanov integral:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{a\in\mathbb{R}} g(a)\mathbb{P}(X \in da) = \int_{a\in\mathbb{R}} g(a) f_X(a)\, da.$$

Ova pravila se ponekad nazivaju *Zakon statističara u nesvesti*, jer prilikom kreiranja integrala samo zamenite slučajnu promenljivu X u očekivanju promenljivom integracije a u integralu. Tako lako da se može učiniti i u nesvesti!

Teorema 3
Neka X ima gustinu $f_X(s)$ u odnosu na Lebegovu meru. Tada

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{s\in\mathbb{R}} g(s) f_X(s)\, ds.$$

Ako je X diskretna slučajna promenljiva sa gustinom $f_X(s)$ u odnosu na meru prebrojavanja,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_s g(s) f_X(s).$$

Definicija 36
Kada $\mathbb{E}[g(X)]$ postoji i konačno je, kažemo da je $g(X)$ **integrabilna**.

Imajte na umu da funkciju g uvek primenjujemo na pomoćnu promenljivu s, a *ne* na funkciju gustine. To uvek ostaje isto. Pogledajmo neke primere.

Primer 25
Neka je $f_X(s) = 12s^2(1-s)\mathbb{1}(s \in [0,1])$. Naći $\mathbb{E}[X^2]$.

Rešenje Ovo je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \cdot 12s^2(1-s)\mathbb{1}(s \in [0,1])\, ds \\ &= \int_0^1 12s^4(1-s)\, ds \\ &= 12[s^5/5 - s^6/6]|_0^1 \\ &= 12[1/5 - 1/6] = 12/30 = 4/10 = \boxed{0.4000}\end{aligned}$$

Ova raspodela je iz familije *Beta*. Specifični parametri za ovu raspodelu su 3 i 2. 3 je za jedan više od stepena s, a 2 je za jedan veći od stepena $1-s$ u formuli za gustinu. Stoga možemo testirati rezultat u R koristeći

```
results <- rbeta(10^6,3,2)
mean(results^2)
```

i nakon pokretanja kôda dobijemo 0.3997603. Za diskretne slučajne promenljive važi isto pravilo: samo kvadratirajte vrednosti, gustina ostaje ista.

Primer 26
Neka je $Y \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4,5,6\})$. Naći $\mathbb{E}[Y^2]$.

Rešenje Ovo će biti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= 1^2\mathbb{P}(Y=1) + 2^2\mathbb{P}(Y=2) + \cdots + 6^2\mathbb{P}(Y=6) \\ &= (1/6)[1+4+9+16+25+36] \\ &= 91/6 = \boxed{15.16}.\end{aligned}$$

Možemo ovo testiratu u R kôdom

```
results <- sample(1:6, 10^6, replace = TRUE)
mean(results^2)
```

nakon čega dobijamo 15.1608.

Primer 27
Pitanje dana Neka je $X \sim \mathsf{Exp}(4.5)$. Tada X ima gustinu

$$f_X(s) = 4.5 \exp(-4.5s)\mathbb{1}(s \geq 0).$$

Dakle očekivana vrednost od X je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{s \in \mathbb{R}} s \cdot 4.5 \exp(-4.5s)\mathbb{1}(s \geq 0)\, ds \\ &= \int_{s=0}^{\infty} s \cdot 4.5 \exp(-4.5s)\, ds\end{aligned}$$

U ovom trenutku moramo da proizvedemo izvod preko kojeg ćemo kliziti i osloboditi se s:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{s \in \mathbb{R}} s \cdot [-\exp(-4.5s)]'\mathbb{1}(s \geq 0)\, ds \\ &= \int_{s=0}^{\infty} [-s\exp(-4.5s)]' - [s]'[-\exp(-4.5s)]\, ds \\ &= [-s\exp(-4.5s)]|_0^{\infty} - \int_{s=0}^{\infty} -\exp(-4.5s)\, ds \\ &= \lim_{s\to\infty} -s\exp(-4.5s) - 0 - \exp(-4.5s)/4.5|_0^s\end{aligned}$$

Zapamtite opšte pravilo:

$$\text{logaritmi} << \text{polinomne f-je} << \text{exponencijalne f-je} << \text{faktorijeli.}$$

Ovde s raste polinomijalno, i $\exp(-4.5s) = 1/\exp(4.5s)$ opada eksponencijalno tako da $s\exp(-4.5s)$ teži 0 kada s teži beskonačnosti. Može se iskoristiti i Lopitalovo pravilo da se ovo proveri.

Dakle

$$\mathbb{E}[X] = 0 - 0 - (0 - 1/4.5) = \boxed{0.2222\ldots}.$$

11.2 Osobine neprekidnih očekivanja

U Poglavlju 10, uočili smo dva najvažnija svojstva očekivane vrednosti.

- Linearnost. Za bilo koje dve slučajne promenljive X i Y i realne brojeve a i b,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

- Jaki zakon velikih brojeva. Ako je X integrabilna, i $X_1, X_2, \ldots$ su iid X, onda

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \mathbb{E}[X]\right) = 1.$$

Obe ove osobine važe i za očekivanje $g(X)$.

Primer 28
Neka je $X \sim \mathsf{Exp}(4.5)$ i $Y \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3\})$. Naći $\mathbb{E}[X + Y]$?

Rešenje Ovde $\mathbb{E}[X] = 2/9$ i $\mathbb{E}[Y] = (1/3)(1) + (1/3)(2) + (1/3)(3) = 6/3 = 2$. Dakle

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2/9 + 2 = 20/9 = \boxed{2.222\ldots}$$

zbog linearnosti.

11.3 Primene Jakog zakona velikih brojeva

Konzistentne ocene u statistici Pretpostavimo da imam tok dolaznih podataka $X_1, X_2, \ldots$ koji modelujem kao iid X gde je $\mathbb{E}[X] = \theta$. Vrednost θ je parametar koji pokušavam da pronađem. Na primer, možda imam model gde

$$X_1, X_2, \ldots \sim \mathsf{Unif}[0, 2\theta].$$

Uzorački prosek

$$\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

daje nam niz ocena vrednosti parametra θ.

Mi onda znamo prema JZVB da uzorački prosek zadovoljava

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta$$

sa verovatnoćom 1.

Kada imamo niz ocena $\hat{\theta}_n$ koje konvergiraju pravoj vrednosti θ kako broj podataka ide u beskonačnost, kažemo da je ocena *konzistentna*, što je veoma poželjna osobina.

Monte Karlo U Monte Karlo simulaciji, da bi se izračunao integral, prvo je potrebno konstruisati slučajnu promenljivu X takvu da je $\mathbb{E}[X]$ jednak vrednosti integrala.

Primer 29
Konstruisati slučajnu promenljivu X takvu da je $\mathbb{E}[X] = I$, gde je

$$I = \int_0^1 \sqrt{x^{2.5} - \ln(x)}\, dx.$$

(Imajte na umu da ova funkcija nema elementarnu primitivnu funkciju.)

Rešenje Pošto je oblast integracije $[0, 1]$, možemo bazirati našu slučajnu promenljivu na uniformnoj $U \sim \mathsf{Unif}([0, 1])$. Neka je

$$X = g(U) = \sqrt{U^{2.5} - \ln(U)}.$$

Prema formuli za očekivanje funkcije slučajne promenljive, ovo daje

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[g(U)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u^{2.5} - \ln(u)}\mathbb{1}(u \in [0, 1]) \\
&= I.
\end{aligned}$$

Uz kreiranu formulu, sledeći kôd daje ocenu vrednosti I.

```
u <- runif(10^6)
> mean(sqrt(u^2.5 - log(u)))
```

Ovo je izbacilo `1.095166` što je vrlo blizu tačnom rešenju koje je jednako 1.0954.

Zadaci

11.1 Za X sa gustinom $12s^2(1-s)\mathbb{1}(s \in [0,1])$, naći $\mathbb{E}[X]$.

11.2 Neke je $X \sim \text{Unif}([3,6])$. Naći $\mathbb{E}[X]$.

11.3 Pretpostavimo da su $U_1, U_2, \ldots \sim \text{Unif}([0,4])$. Pokazati $\lim_{n\to\infty}(U_1 + \cdots + U_n)/n = 2$ sa verovatnoćom 1.

11.4 Pretpostavimo $T_1, T_2, \ldots \sim \text{Exp}(2)$. Pokazati

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n} = 1/2$$

sa verovatnoćom 1.

11.5 Za Z sa gustinom

$$f_Z(z) = \tau^{-1/2} \exp(-z^2/2),$$

koristeći integral proverite da je $\mathbb{E}[Z] = 0$.

11.6 Neka je $U = \text{Unif}([0,1])$. Onda takođe i $1 - U \sim \text{Unif}([0,1])$. Primetite da je

$$\mathbb{E}[U] + \mathbb{E}[1-U] = \mathbb{E}[U + 1 - U] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

dato da je $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[1-U]$ (pošto imaju istu raspodelu), koliko je $\mathbb{E}[U]$?

11.7 Pretpostavimo $\mathbb{P}(X = -1) = 0.3$ i $\mathbb{P}(X = 1) = 0.7$. Koliko je $\mathbb{E}[X^2]$?

11.8 Pretpostavimo $Y = 1/U$ gde je $U \sim \text{Unif}([0,1])$. Pokazati da Y nije integrabilna.

11.9 Neka X ima gustinu $s\exp(-s^2/2)\mathbb{1}(s \geq 0)$. Naći $\mathbb{E}[X^2]$.

11.10 Neka $U \sim \text{Unif}([0,1])$. Naći očekivanu vrednost od $\sqrt{U}$.

11.11 Napravimo slučajnu promenljivu W takvu da je $\mathbb{E}[W] = I$, gde je

$$I = \int_{-1}^{1} 2x^2 \, dx.$$

11.12 Napravimo slučajnu promenljivu Y takvu da je $\mathbb{E}[Y] = I$, gde je

$$I = \int_0^3 \exp(-x^{2.5}) \, dx.$$

11.13 Za slučajnu promenljivu A, *srednja apsolutna devijacija* od A je definisana kao

$$\text{MAD}(A) = \mathbb{E}\left[|A - \mathbb{E}[A]|\right].$$

Neka je $A \sim \text{Exp}(\lambda)$. Find $\text{MAD}(A)$.

11.14 Za $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$, naći $\mathrm{MAD}(U)$.

11.15 Tri zombija te jure. Svaki od njih trči brzinom koja je nezavisno uniformno raspoređena između 6 i 11 milja na sat.

a) Ako možeš da trčiš brzinom od 10 milja na sat, koja je verovatnoća da ćeš pobeći od zombija?

b) Koja je očekivana brzina najbržeg zombija?

11.16 Dve ptice lete brzinom (nezavisno jedna o drugoj) koja je uniformna između 21.1 i 32.3 milja na čas. Koja je očekivana brzina brže ptice?

11.17 Uzmimo $U \sim \mathsf{Unif}([0,2])$.

a) Naći cdf za $X = U^3$.

b) Naći gustinu od X.

c) Naći $\mathbb{E}[X]$.

11.18 Za $A \sim \mathsf{Exp}(2)$, naći $\mathbb{E}[A^3]$.

11.19 Pretpostavimo $A \sim \mathsf{Exp}(3)$, tako da A ima gustinu

$$f_A(s) = 3\exp(-3s)\mathbb{1}(s \geq 0).$$

Očekivanje eksponencijalne raspodele je multiplikativni inverz stope, pa je $\mathbb{E}A = 1/3$.

a) Koliko je $\mathbb{E}[2A-1]$?

b) Koliko je $\mathbb{E}[\exp(1.5A)]$?

c) Koja je gustina za $2A-1$?

11.20 Slučajna promenljiva X ima *Beta* raspodelu sa parametrima a i b ako ima gustinu

$$f_X(s) = s^{a-1}(1-s)^{b-1}\mathbb{1}(s \in [0,1]).$$

a) Za X Beta sa parametrima 3 i 1, naći $\mathbb{E}[X]$.

b) Naći $\mathbb{E}[3X+6]$.

c) Naći $\mathbb{E}[X^2]$.

Glava **12**

Uslovno očekivanje

Pitanje dana Pretpostavimo da imamo dve slučajne promenljive N i X takve da raspodela za X zavisi od vrednosti N. Konkretno neka $N \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4\})$ i $[X|N] \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,\ldots,N\})$. To znaci $\mathbb{E}[X|N] = (N+1)/2$. Šta je onda $\mathbb{E}[X]$?

Sažetak Uslovno očekivanje $\mathbb{E}[X|Y]$ je prosečna vrednost slučajne promenljive X data vrednost jedne druge sl. prom. Y. Rezultat je funkcija od Y. Ako onda uzmete prosek ove funkcije od Y preko vrednosti od Y, dobijamo nazad ukupnu prosečnu vrednost od X. Ovaj rezultat, da je

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X],$$

zove se i **Osnovna teorema verovatnoće**.
Osnovna teorema verovatnoće može biti korišćena da nam da stabla verovatnoće, stabla očekivanja, kao i očekivanja i varijanse geometrijske slučajne promenljive.

12.1 Uslovljavanje slučajnom promenljivom

U pitanju dana, nije nam direktno data raspodela od X. Umesto toga, rečeno nam je da je raspodela X, imajući vrednost druge slučajne promenljive N, uniformna na brojevima od 1 do N.

Ova informacija je dovoljna za izračunavanje gustine od X. Na primer, uzmite u obzir šansu da je X jednako 2. Pošto $1 \leq X \leq N$, N mora biti jednako 2, 3 ili 4 da bi se ovo desilo.

Dakle možemo podeliti događaj:

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=2, N=2) + \mathbb{P}(X=2, N=3) + \mathbb{P}(X=2, N=4).$$

Svaki od njih možemo razložiti koristeći uslovnu verovatnoću, tako da npr.

$$\mathbb{P}(X=2, N=3) = \mathbb{P}(N=3)\mathbb{P}(X=2|N=3) = (1/4)(1/3) = 1/12.$$

I dobijamo

$$\mathbb{P}(X=2) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] = \frac{13}{48}.$$

Ponavljanjem za $i \in \{1,2,3,4\}$ dobijamo sledeću gustinu za X:

$$f_X(i) = \frac{25}{48}\mathbb{1}(i=1) + \frac{13}{48}\mathbb{1}(i=2) + \frac{7}{48}\mathbb{1}(i=3) + \frac{3}{48}\mathbb{1}(i=4).$$

Sada kada imamo gustinu, možemo pronaći očekivanu vrednost:

$$\mathbb{E}[X] = (1)\frac{25}{48} + (2)\frac{13}{48} + (3)\frac{7}{48} + (4)\frac{3}{48} = \frac{84}{48} = \boxed{1.750}.$$

U redu, mogli smo da rešimo ovaj problem direktnim proračunom, ali ovo brzo postaje veoma glomazno. Na primer, čak i ako je N samo $\mathsf{Unif}(\{1, 2, \ldots, 6\})$, količina posla se skoro udvostručuje.

Za brži metod, razmislite o pronalaženju $\mathbb{E}[X|N]$. Šta ovo znači? Ovo je prosečna vrednost X ako je dato da je vrednost N fiksna, a ne slučajna promenljiva. Obično N bi bila slučajna promenljiva, ali ovde kažemo da nam je vrednost od N nekako poznato. U ovom slučaju, možemo tretirati N kao da je to samo obična promenljiva. Onda znamo da je $\mathbb{E}[X|N] = (1 + N)/2$, jer je $[X|N]$ izbrano uniformno od 1 sve do N.

Primetimo da za $f(n) = (1 + n)/2$, ovo kaže da je

$$\mathbb{E}[X|N] = f(N).$$

To jest *uslovno očekivanje* $\mathbb{E}[X|N]$ je i samo funkcija od N. A funkcije slučajnih promenljivih su same po sebi slučajne promenljive.

Intuicija 4
Uslovno očekivanje $\mathbb{E}[X|Y]$ je nova slučajna promenljiva jednaka $g(Y)$ za neko g.

12.2 Osnovna teorema verovatnoće

U redu, možemo da izračunamo $\mathbb{E}[X|N] = (1 + N)/2$, ali kako nas to dovodi bliže onome što želimo, a to je $\mathbb{E}[X]$? Pa, kada znamo kako prosečna vrednost X zavisi od N, možemo se osloboditi zavisnosti od N usrednjavanjem različitih vrednosti N. To jest,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|N]] = \mathbb{E}[X],$$

i u našem problemu

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[(1 + N)/2] = (1 + \mathbb{E}[N])/2 = (1 + (1 + 4)/2)/2 = 1.75,$$

baš onako kako smo i izračunali ranije!

Ovaj važan rezultat nosi nekoliko imena, kao što je *Zakon ukupnog očekivanja.* Pošto je fundamentalna za veliki deo verovatnoće i uključuje formulu uslovne verovatnoće kao poseban slučaj, mi ćemo je ovde zvati *Osnovna teorema verovatnoće* ili OTV.

Teorema 4 (Osnovna teorema verovatnoće)
Za slučajne promenljive X i Y gde su $\mathbb{E}[X]$ i $\mathbb{E}[X|Y]$ uvek konačni, važi

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X].$$

12.3 Stabla očekivanja i verovatnoće

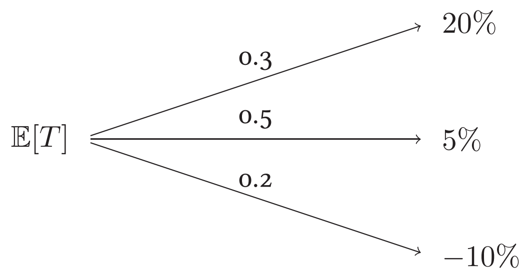
Po OTV, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$. Desna strana ima unutrašnje očekivanje, $\mathbb{E}[X|Y]$, a zatim i spoljašnje očekivanje oko njega. U pitanju dana, imalo je smisla izračunati prvo unutrašnje očekivanje, ali ponekad ima smisla izračunati prvo spoljašnje očekivanje, pa onda unutrašnje. Razmotrimo sledeći primer.

Primer 30
Pretpostavimo da kada je ekonomija dobra (što se dešava sa verovatnoćom 0.3), prosečno povećanje cena akcija je 20%. Kada je ekonomija umerena (šansa 0.5), prosečno povećanje u ceni akcija je 5%, a kada je ekonomija loša (šansa 0.2), prosečno povećanje u ceni akcija je -10%. Koje je prosečno povećanje u ceni akcija?

Rešenje Sa OTV ne moramo da znamo raspodelu cena akcija za odgovor na ovo pitanje, dovoljna je prosečna promena! Neka $S \in \{1, 2, 3\}$ označava stanje ekonomije (1=loše, 2=umereno, 3=dobro) i T promena u akcijama. Onda

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[T|S]] &= \mathbb{E}[T|S=1]\mathbb{P}(S=1) + \mathbb{E}[T|S=2]\mathbb{P}(S=2) + \\ &\quad \mathbb{E}[T|S=3]\mathbb{P}(S=3) \\ &= (0.2)(0.3) + (0.05)(0.5) + (-0.10)(0.2) = 0.065 = \boxed{6.500\%}.\end{aligned}$$

Ova vrsta proračuna može se grafički predstaviti korišćenjem *stabla očekivanja.*



Duž tri moguće grane stavljamo verovatnoću svake grane. Zbir težina grana uvek treba da bude jednak 1. Na na kraju svake grane stavljamo očekivanu vrednost ako se ta grana dogodi.

Zatim da bismo izračunali vrednost stabla očekivanja, pomnožimo težinu grane sa očekivanjem na kraju grane, i sve saberemo (u ovom slučaju 6.5%).

Prisetimo se da je $\mathbb{E}(\mathbb{1}(X \in A)) = \mathbb{P}(X \in A)$, to jest da su verovatnoće specijalan slučaj očekivanja. Kada se OTV primenjuje na verovatnoće, on se često naziva *zakon potpune verovatnoće.*

Činjenica 36 (Zakon potpune verovatnoće)
Neka su $A_1, A_2, \ldots$ disjunktni događaji takvi da je jedan istinit sa verovatnoćom 1. Tada

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Dokaz. Neka je T slučajna promeljiva koja uzima vrednosti $\{1, 2, \ldots\}$. Konkretno, neka je $T = i$ ako je A_i istinit. Tada prema OTV,

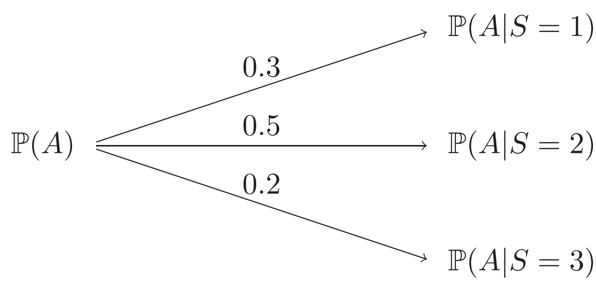
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{1}(B)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}(B)|T]] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}(B)|T=i]\mathbb{P}(T=i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).\end{aligned}$$

□

Primer 31
Nastavljajući naš prethodni primer, ako verovatnoća događaja A zavisi od vrednosti S, onda

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|S=1)\mathbb{P}(S=1) + \mathbb{P}(A|S=2)\mathbb{P}(S=2) + \mathbb{P}(A|S=3)\mathbb{P}(S=3).$$

Grafička prezentacija onda postaje *stablo verovatnoće*.



12.4 Očekivanje geometrijske slučajne promenljive

Setimo se da ako su $U_1, U_2, \ldots$ iid $\mathsf{Unif}([0,1])$, onda $B_i = \mathbb{1}(U_i \leq p)$ proizvodi niz slučajnih promenljivih $B_1, B_2, \ldots$ of $\mathsf{Bern}(p)$.

Štaviše, ako dozvolimo da je G najmanja vrednost od i tako da je $B_i = 1$, onda kažemo da G ima *geometrijsku raspodelu* sa parametrom p. Razmislite o korišćenju OTV-a da biste pronašli $\mathbb{E}[G]$ uslovljavanjem sa B_1.

Činjenica 37
Za $G \sim \mathsf{Geo}(p)$, $\mathbb{E}[G] = 1/p$.

Dokaz. Pogledajmo prvu Bernulijevu slučajnu promenljivu B_1. Ako je $B_1 = 1$, onda $G = 1$, ali ako $B_1 = 0$, onda raspodela od G je jednaka onom jednom potrošenom izvlačenju plus nova geometrijska slučajna promenljiva. To jest,

$$[G|B_1 = 0] \sim 1 + G.$$

Ovo može biti provereno direktno:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G = i|B_1 = 0) &= \mathbb{P}(G = i, B_1 = 0)/\mathbb{P}(B_1 = 0)\\ &= p(1-p)^{i-1}\mathbb{1}(i > 1)/(1-p)\\ &= p(1-p)^{i-2}\mathbb{1}(i > 1)\end{aligned}$$

i

$$\mathbb{P}(1 + G = i) = \mathbb{P}(G = i - 1) = p(1-p)^{i-1}\mathbb{1}(i - 1 > 0)$$

što su iste dve funkcije.

Dakle,

$$\mathbb{E}(G|B_1 = 0) = \mathbb{E}(1 + G) = 1 + \mathbb{E}(G).$$

Stavljajući ovo u OTV nam daje:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(G|B_1)) \\ &= \mathbb{E}(G|B_1 = 0)\mathbb{P}(B_1 = 0) + \mathbb{E}(G|B_1 = 1)\mathbb{P}(B_1 = 1) \\ &= (1 + \mathbb{E}(G))(1 - p) + (1)(p).\end{aligned}$$

Rešavanjem po $\mathbb{E}(G)$ onda daje $\mathbb{E}(G) = 1/p$. □

12.5 Formula uslovne verovatnoće

Na početku ovog poglavlja rekao sam da OTV generalizuje formulu uslovne verovatnoće. Da bismo videli da je to tačno prvo primetimo da

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{E}(\mathbb{1}(AB)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}(A)\mathbb{1}(B)).$$

Onda prema OTV

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(AB) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbb{1}(A)\mathbb{1}(B))|\mathbb{1}(B))] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}(A)\mathbb{1}(B)|\mathbb{1}(B) = 1]\mathbb{P}(\mathbb{1}(B) = 1) + \mathbb{E}[\mathbb{1}(A)\mathbb{1}(B)|\mathbb{1}(B) = 0]\mathbb{P}(\mathbb{1}(B) = 0) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}(A)|\mathbb{1}(B) = 1]\mathbb{P}(B) + \mathbb{E}[0|\mathbb{1}(B) = 0]\mathbb{P}(\mathbb{1}(B) = 0) \\ &= \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B),\end{aligned}$$

što je upravo formula uslovne verovatnoće!

Naravno, dokaz OTV-a koristi formulu uslovne verovatnoće, tako da je ovo samo vežba koja pokazuje da je OTV opštija formula.

Zadaci

12.1 Neka su B_1, B_2 iid $\mathsf{Bern}(0.3)$. Uzmimo i da je $\mathbb{P}(N = 1) = 0.6$ i $\mathbb{P}(N = 2) = 0.4$.

a) Naći gustinu od
$$S = \sum_{i=1}^{N} B_i.$$

b) Naći $\mathbb{E}[S]$ koristeći gustinu.

c) Naći $\mathbb{E}[S]$ koristeći Osnovnu teoremu verovatnoće.

12.2 Pretpostavimo da imam $N \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2\})$. Onda bacam N kockica nezavisno i sa istom raspodelom $\mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ pa ih saberem da dobijem S. To je

$$[S|N = 1] = X_1,\ [S|N = 2] = X_1 + X_2.$$

Ili u kompaktnijoj formi,
$$[S|N] = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Ovde je $X_i \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$

a) Koja je verovatnoća da je $S = 4$?

b) Koja je verovatnoća da je $S = 7$?

c) Naći gustinu za S, $f_S(i)$ za $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$.

d) Naći $\mathbb{E}[S]$ koristeći $f_S(i)$.

e) Naći $\mathbb{E}[S]$ koristeći Osnovnu teoremu verovatnoće.

12.3 Zabava ima ili malu posećenost (20% šanse), srednju posećenost (40% šanse) ili visoku posećenost (40% šanse). Sa slabom posećenošću prosečan prihod je $-\$300$, sa srednjom $\$500$, i sa visokom $\$1000$.

Nacrtajte stablo očekivanja za izračunavanje prosečnog prihoda zabave.

12.4 Liza i Bart idu u speloniranje u pećini i, nažalost, uskoro se izgube. Svaki put kada pokušavaju da pronađu izlaz, imaju 20% šanse da pronađu izlaz za sat vremena, 45% povratka tamo odakle su počeli posle sat vremena, i 35% povratka tamo gde su počeli posle tri sata.

a) Kolika je šansa da nađu izlaz nakon tačno četiri sata?

b) Kolika je šansa da pronađu izlaz posle tačno osam sati?

c) Koje je očekivano vreme koje provedu u pećini?

12.5 Pretpostavimo da je vreme do dolaska mušterije (zovimo ga T) eksponencijalna slučajna promenljiva sa parametrom A (tako da $[T|A] \sim \mathsf{Exp}(A)$.) A je slučajna promenljiva uniformna na intervalu $[5, 10]$. Koliko je $\mathbb{E}[T]$?

12.6 Verovatnoća uspeha u eksperimentu p je modelovana kao uniformna na intervalu $[0.4, 0.5]$. Onda se izvrše 27 nezavisnih eksperimenata. Koji je očekivani broj uspeha?

Glava 13

Zajedničke gustine

Pitanje dana Neka (X_1, X_2) ima zajedničku gustinu

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \exp(-x_1 - x_2)\mathbb{1}(x_1, x_2 \geq 0).$$

Koliko je $\mathbb{P}((X_1, X_2) \in [0,1] \times [0,2])$?

Sažetak Reč **zajednička** se koristi kod gustina koje su dvo ili višedimenzionalne. Dvozdimenzione gustine se zovu **bivarijantne**. Verovatnoće za bivarijantne gustine nalazimo koristeći dvodimenzioni integral. Tako, za $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)\, d\mathbb{R}^2.$$

Ako je $f(x_1, \ldots, x_n)$ gustina za $X_1, \ldots, X_n$. Za (X, Y) sa zajedničkom gustinom, gustina svakog pojedinačnog X_i može se naći **integracijom** ostalih promenljivih. Za bivarijante slučajne promenljive, to znači

$$f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy, \;\; f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx.$$

Za merljivu funkciju $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[g(X_1, X_2)] = \int_{(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2} g(s_1, s_2) f_{(X_1,X_2)}(s_1, s_2)\, d\mu$$

Podsetimo se da je f_X *gustina* od X u odnosu na μ ako se verovatnoće nalaze integracijom u odnosu na μ. To jest,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_{x\in A} f_X(x)\, d\mu.$$

Kada je μ Lebegova meraℓ, kažemo da imamo neprekidnu slučajnu promenljivu i

$$\int_{x\in A} f_X(x)\, d\ell = \int_{x\in A} f_X(x)\, dx$$

Kada je μ mera prebrojavanja $\#$, kažemo da je X diskretna slučajna promenljiva, i

$$\int_{x\in A} f_X(x)\, d\# = \sum_{x\in A} f_X(x).$$

Slučajne promenljive u više od jedne (ali ipak konačne) dimenzije rade na isti način. Međutim, kada integrišete gustinu, to radite preko višedimenzionalnog prostora.

U ovom poglavlju ćemo se koncentrisati na ono što se dešava kada imate dve slučajne promenljive. Ovu situaciju nazivamo *bivarijantnom*.

Definicija 37
Slučajna promenljiva koja je tačka u $\mathbb{R}^2$ naziva se **bivarijantna**.

Primer 32
U pitanju dana, (X_1, X_2) je bivarijantna slučajna promenljiva.

Ako $(U_1, U_2) \sim \mathsf{Unif}([0,1]^2)$, onda U_1 i U_2 formiraju bivarijantnu slučajnu promenljivu.

Definicija 38
Za (X, Y), kažemo da je $f_{X,Y}$ **gustina** za (X, Y) u odnosu na μ ako za sve $A \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{P}((X,Y)\in A) = \int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)\, d\mu.$$

Pitanje dana Za pitanje dana, ovo funkcioniše kao

$$\mathbb{P}((X_1,X_2)\in[0,1]\times[0,2]) = \int_{(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,2]} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, d\mathbb{R}^2.$$

Pošto je integrand nenegativan, možemo iskoristiti Tonelijevu teoremu da ga zapišemo kao dvostruki integral.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_1,X_2)\in[0,1]\times[0,2]) &= \int_{x_1\in[0,1]}\int_{x_2\in[0,2]} \exp(-x_1-x_2)\mathbb{1}(x_1,x_2\geq 0)\, dx_2\, dx_1 \\
&= \int_{x_1\in[0,1]} -\exp(-x_1-x_2)|_0^2\, dx_1 \\
&= \int_{x_1\in[0,1]} -\exp(-x_1-2)-(-\exp(-x_1))\, dx_1 \\
&= \exp(-x_1-2)-\exp(-x_1)|_0^1 \\
&= \exp(-3)-\exp(-1)-(\exp(-2)-\exp(0)) \approx \boxed{0.5465}.
\end{aligned}$$

Kada se radi o diskretnim slučajnim promenljivim, ovo se pretvara u zbir.

Primer 33
Neka (X, Y) ima gustinu $f_{X,Y}(x, y) = (1/37)(x^2 + y)$ za $x \in \{1, 2, 3\}$ i $y \in \{1, 2\}$. Šta je $\mathbb{P}(Y = 1)$?

Rešenje Ovo je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}((X, Y) \in \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\} \\ &= (1/37)[(1 + 1) + (4 + 1) + (9 + 1)] = 17/37 \approx \boxed{0.4594}.\end{aligned}$$

Imajte na umu da ovo znači (po komplementu) da je $\mathbb{P}(Y = 2) = 20/37$. Pošto su ovo jedine dve opcije,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{17}{37}, \; \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{20}{37}$$

u potpunosti opisuje raspodelu od Y. Kada izračunamo raspodelu jedne komponente zajednički raspodeljenih slučajnih promenljivih, to se zove *marginalna raspodela.*

Definicija 39
Za slučajni vektor (X_1, X_2), raspodela od X_1 ili X_2 se zove **marginalna raspodela**.

Možete pronaći marginalnu gustinu za određenu promenljivu tako što ćete *integraliti* lažnu promenljivu za drugu slučajnu promenljivu.

Činjenica 38
Neka (X, Y) ima gustinu $f_{X,Y}$ u odnosu na $\mu \times \nu$. Onda

$$f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\, d\nu, \quad f_y(y) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\, d\mu.$$

Dokaz. Da bi f_X bila gustina od X, mora za sve merljive skupove A da važi,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(a)\, d\mu.$$

Pošto je $\mathbb{P}(Y \in \mathbb{R}) = 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{x \in A} \left[\int_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\, d\nu\right] d\mu\end{aligned}$$

i tako deo unutar zagrada zadovoljava definiciju gustine od X. Argument za f_Y je sličan. $\square$

Primer 34
Neka (X, Y) ima gustinu $f_{X,Y}(x, y) = (1/37)(x^2 + y)$ za $x \in \{1, 2, 3\}$ i $y \in \{1, 2\}$. Koja je marginalna raspodela od X?

Rešenje Za $x \in \{1, 2, 3\}$,

$$f_X(x) = \sum_{y \in \{1,2\}} (1/37)(x^2 + y) = (1/37)[(x^2 + 1) + (x^2 + 2)] = \boxed{\frac{2x^2 + 3}{37}}.$$

13.1 Nezavisnost i zajedničke gustine

Nezavisnost znači da verovatnoća realizacije više događaja predstavlja proizvod svih tih događaja. Na isti način, slučajne promenljive koje su nezavisne imaju zajedničku gustinu koja je proizvod gustina od svih marginalnih.

Podestimo se da je $\mu \times \nu$ mera proizvod ako za sve A koje su μ merljive i B koje su ν merljive,

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B).$$

Naše dve najčešće korišćene mere, mera prebrojavanja i Lebegova mera, koriste meru proizvoda u višim dimenzijama. Zato je površina pravougaonika proizvod dužina stranica. Na primer,

$$\ell([0, 4] \times [3, 5]) = \ell([0, 4]) \cdot \ell([3, 5]) = 4 \cdot 2 = 8.$$

Ako uzmem loptu iz vreće koja sadrži jednu crvenu, jednu zelenu i jednu plavu kuglu, a zatim bacim kocku sa šest strana, broj mogućih ishoda je

$$\#(\{\text{red}, \text{green}, \text{blue}\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 3 \cdot 6 = 18.$$

Činjenica 39
Pretpostavimo da slučajne promenljive X i Y imaju zajedničku gustinu u odnosu na meru proizvod $\mu \times \nu$ koja može da se rastavi na deo koji uključuje samo jedan ulaz i drugi deo koji uključuje samo drugi ulaz. To jest, ima formu

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

gde je f_X gustina u odnosu na μ, a f_Y je gustina u odnosu na ν. Tada je f_X gustina od X, f_Y je gustina od Y, a X i Y su nezavisne slučajne promenljive.

Dokaz. Neka je $f_{X,Y} = f_X(x) f_Y(y)$. Onda $\mathbb{P}(Y \in \mathbb{R}) = 1$, tako da za bilo koji μ-merljiv skup A,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in \mathbb{R}) \\
&= \int_{x \in A} \int_{y \in \mathbb{R}} f_X(x) f_Y(y) \, d\nu \, d\mu \\
&= \int_{x \in A} f_X(x) \left[\int_{y \in \mathbb{R}} f_Y(y) \, d\nu \right] d\mu \\
&= \int_{x \in A} f_X(x) \, d\mu.
\end{aligned}$$

Ovo je definicija šta zapravo znači da X ima gustinu f_X. Dokaz da f_Y mora biti gustina od Y je sličan.

Sada nezavisnost. Neka je A μ merljiv i B ν merljiv. Tada

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int_{x\in A}\int_{y\in B} f_X(x)f_Y(y)\,d\nu\,d\mu \\ &= \int_{x\in A} f_X(x)\left[\int_{y\in B} f_Y(y)\,d\nu\right]d\mu \\ &= \int_{x\in A} f_X(x)\mathbb{P}(Y\in B)\,d\mu \\ &= \mathbb{P}(Y\in B)\int_{x\in A} f_X(x)\,d\mu \\ &= \mathbb{P}(Y\in B)\mathbb{P}(X\in A),\end{aligned}$$

dakle X i Y su nezavisne. □

Imajte na umu da obično postoji više izbora zajedničke gustine za neprekidne slučajne promenljive. Sve što je potrebno je *jedna* zajednička gustina koja može da se napiše kao proizvod pa da varijable budu nezavisne.

Drugi smer takođe važi.

Činjenica 40
Neka su X, koje ima gustinu f_X u odnosu na μ i Y, koje ima gustinu f_Y u odnosu na ν nezavisne slučajne promenljive. Onda (X, Y) ima za zajedničku gustiny $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ u odnosu na $\mu \times \nu$.

13.2 Očekivanja zajedničkih gustina

Očekivana vrednost bivarijantnog slučajnog vektora je slična onoj od samo jedne slučajne promenljive.

Definicija 40
Za (X, Y) sa gustinom $f_{X,Y}$ u odnosu na μ, i izračunljivom funkcijom $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{x,y} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\,d\mu.$$

Prvo jedan diskretan primer.

Primer 35
Nake (X, Y) imaju gustinu $f_{X,Y}(x, y) = (1/37)(x^2 + y)$ za $x \in \{1, 2, 3\}$ i $y \in \{1, 2\}$. Koliko je $\mathbb{E}[XY]$?

Rešenje Pošto su ovo diskretne slučajne promenljive, ovo će biti suma

$$\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} xy[(1/37)(x^2+y)] = \frac{138}{37} = \boxed{3.729\ldots}.$$

Probajmo i neprekidni primer.

Primer 36
Neka (X_1, X_2) ima zajedničku gustinu

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \exp(-x_1 - x_2)\mathbb{1}(x_1, x_2 \geq 0).$$

Naći $\mathbb{E}[X_1X_2]$.

Rešenje Integral će biti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1X_2] &= \int_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} x_1x_2 \exp(-x_1 - x_2)\mathbb{1}(x_1, x_2 \geq 0)\, d\mathbb{R}^2 \\ &= \int_{x_1\geq 0, x_2\geq 0} x_1x_2 \exp(-x_1 - x_2)\, d\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

U granicama integracije, integrand je nenegativan, dakle mogu se koristiti dvostruki integrali za dobijanje

$$\mathbb{E}[X_1X_2] = \int_{x_1\geq 0}\int_{x_2\geq 0} x_1x_2 \exp(-x_1 - x_2)\, dx_2\, dx_1 = \boxed{1}.$$

Zadaci

13.1 Uzmimo da (X, Y) ima gustinu $(1/60)(x + 2y)\mathbb{1}(x \in [0, 2], y \in [0, 5])$.

a) Naći marginalnu gustinu za X.
b) Naći marginalnu gustinu za Y.
c) Naći $\mathbb{E}[XY]$.

13.2 Pretpostavimo da (X, Y) ima gustinu $(x^3 + y^2)/150$ for $X \in \{1, 2, 3\}$ and $Y \in \{1, 2, 3\}$.

a) Naći marginalnu gustinu za X.
b) Naći $\mathbb{E}[XY]$.

13.3 Neka (X, Y) ima gustinu

$$f_{X,Y}(x, y) = (1/1260)x^3y^2\mathbb{1}(x \in \{1, 2, 3\})\mathbb{1}(y \in \{1, 3, 5\}.$$

a) Dokazati da su X i Y nezavisni.
b) Koliko je $\mathbb{P}(X = 2)$?

13.4 Neka (X, Y) ima gustinu

$$\frac{2\sqrt{2}}{\tau}\exp(-x^2 - 2y^2).$$

Dokazati da su X i Y nezavisne. Za ovaj problem nam je korisno da znamo integral

$$\int_{s=-\infty}^{\infty} \exp(-s^2/2)\, ds = \sqrt{\tau}.$$

13.5 Neka je $(X_1, X_2) = (7.314, 2.103)$. Koje su statistike poretka?

13.6 Za $(Y_1, Y_2) = (2.3, -0.4, 1.6)$, šta su statistike poretka za $\{Y_i\}$?

13.7 Neka je $(X_1, X_2) = (5.623, 5.623)$. Koje su statistike poretka?

13.8 Za $(U_1, U_2) \sim \mathsf{Unif}([0,1]^2)$, koliko je $\mathbb{P}(U_1 = U_{(1)})$?

13.9 Pretpostavimo da su statistike poretka $X_{(1)} = 1.3$ i $X_{(2)} = 3.4$. Koje moguće vrednosti može imati početni vektor (X_1, X_2)?

Glava 14

Slučajne promenljive kao vektori

Pitanje dana Neka je $T \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3\})$. Šta je standardna devijacija od T?

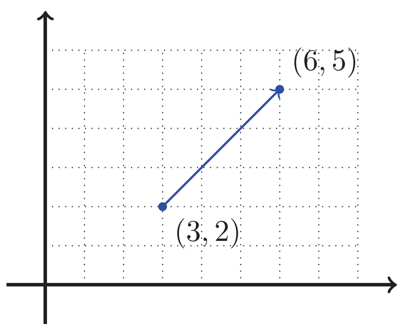
Sažetak Vektorski prostori se sastoje od vektora i skalara. Sabiranjem vektora dobija se novi vektor, a kada skalari množe vektore dobije se skalirani vektor. Unutrašnji proizvodi se mogu koristiti za dobijanje norme na vektorskom prostoru. Centrirana verzija integrabilne slučajnu promenljivu X definiše se kao $X_c = X - \mathbb{E}[X]$. Važan vektorski prostor dolazi iz skupa centriranih slučajnih promenljivih. Za ovaj vektorski prostor, unutrašnji proizvod je srednja vrednost proizvoda centriranih slučajnih promenljivih. Ovo se zove **kovarijansa**. Kovarijansa slučajne promenljive sa samom sobom je **varijansa**, a kvadratni koren toga je **standardna devijacija.**

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
\operatorname{SD}(X) &= \sqrt{\mathbb{V}(X)}.
\end{aligned}$$

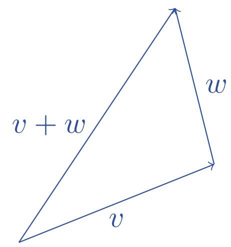
14.1 Vektorski prostori

Vektorski prostor se sastoji od dva tipa objekata: vektora i skalara. Ako saberemo dva vektora dobijamo novi vektor. A ako pomnožimo skalar puta vektor, dobijemo opet novi vektor.

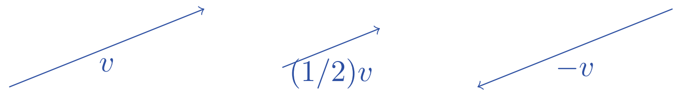
Tip vektora koji većina ljudi prve upozna su vektori koji mere *pomeranje*. Ovi prostorni vektori se sastoje od dve tačke, repa i glave. Na primer, ako je rep $(3, 2)$, a glava $(6, 5)$, onda vektor izgleda ovako.



$(3, 2)$ nazivamo *repom* vektora, a $(6, 5)$ *glavom* vektora. Da biste dodali dva prostorna vektora, samo postavite rep jednog vektora na vrh drugog vektora.



Da bismo skalirali vektor, samo promenimo njegovu dužinu, a ako je skala negativna, takođe obrnemo njegov smer.



Primetimo da nije važno gde ćemo nacrtati rep prostornog vektora. Pošto nas zanima samo razlika između glave i repa, to je kao da je rep uvek postavljen u početno mesto $(0, 0)$.

Da bismo slučajne promenljive pretvorili u vektore, uradićemo nešto slično. Da bismo centrirali slučajne promenljive, oduzećemo očekivanje od slučajne promenljive.

Definicija 41
Za integrabilnu slučajnu promenljivu X,

$$X_c = X - \mathbb{E}[X]$$

je **centrirana** verzija X.

Očekivanje centrirane slučajne promenljive je 0.

Činjenica 41
Centrirana verzija integrabilne slučajne promenljive ima očekivanje 0.

Dokaz. Pošto je $\mathbb{E}[X]$ konstanta, onda

$$\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0.$$

□

Imajte na umu da ako su A i B slučajne promenljive sa očekivanjem 0, onda je $\mathbb{E}[A + B] = \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B] = 0 + 0 = 0$. To znači da se sabiranjem dva vektora (centrirane slučajne promenljive) dobija novi vektor.

Slično, za bilo koju konstantu c, $\mathbb{E}[cA] = c\mathbb{E}[A] = 0$, tako da množenje skalarom takođe vraća vektor.

Sada, da bismo bili sigurni da centrirane slučajne promenljive formiraju vektorski prostor, moramo da proverimo sva pravila vektorskog prostora.

Definicija 42
Vektorski prostor je skup vektora V zajedno sa skupom skalara S i dve operacije sa sledećim svojstvima.

Vektorsko sabiranje, $+$, takvo da $(\forall v, w \in V)(v + w \in V)$. Ono je asocijativno i komutativno. Tu je nula vektor 0 takav da $(\forall v \in V)(v + 0 = v)$. Postoje i inverzi, takvi da $(\forall v \in V)(\exists w \in V)(v + w = 0)$.

2. Množenje skalarom, $\cdot$, takvo da $(\forall s \in S)(\forall v \in V)(sv \in V)$. Ovo množenje ima jedinični element $1 \in S$ takav da $(\forall v)(1v = v)$. Takođe $(\forall a, b \in S)(\forall v \in V)((ab)v = a(bv))$. Distributivno je na dva načina:
$$(\forall a \in S)(\forall v, w \in V)(a(v + w) = av + aw)$$
i
$$(\forall a, b \in S)(\forall v \in V)((a + b)v = av + bv).$$

Lako je proveriti da ova pravila važe za naše centrirane slučajne promenljive.

14.2 Norme i unutrašnji proizvodi

Norma vektora meri veličinu vektora. Za prostorne vektore uobičajena norma je dužina vektora. Za centrirane vektore slučajnih promenljivih norma meri raširenost, numeričku meru neizvesnosti, u promenljivim. Generalno, norma mora da zadovolji sledeća pravila.

Definicija 43
Norma vektorskog prostora uzima kao ulaz vektor i vraća nenegativan realan broj. Zapišimo normu vektora v kao $\|v\|$. Tada ona mora da zadovolji sledeća pravila.

1. Za svako $c \in \mathbb{R}$ i vektor v, $\|cv\| = |c| \|v\|$.
2. Za sve vektore v i w,
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$
3. Za svaki vektor v, $\|v\| \geq 0$, i $\|v\|$ je jednaka 0 ako je v nula vektor.

Za prostorne vektore drugo svojstvo znači da dužina stranice trougla mora biti manja od zbira dužina druge dve stranice, pa je ovo poznato i kao *nejednakost trougla.*

Unutrašnji proizvod između dva vektora meri koliko su oni „u liniji” i ima uobičajena svojstva koja povezujemo sa proizvodom, kao što su komutativnost i distribucija. Pošto u ovom kursu koristimo samo realne brojeve, mi ćemo se držati definicije sa realnim brojevima. Malo je drugačije za kompleksne brojeve.

Definicija 44
Unutrašnji proizvod $\langle x, y\rangle$ slika vektore x, y u realni broj i mora da zadovolji četiri osobine. (U ovim osobinama u, v i w su vektori, a α je skalar.)
$\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

2. $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$

3. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

4. $\langle v, v\rangle \geq 0$ gde jednakost važi ako i samo ako $v = 0$.

Kada su $V = \mathbb{R}^n$, $S = \mathbb{R}$, uobičajeni unutrašnji proizvod je *skalarni proizvod vektora* koji se definiše za $v = (v_1, \ldots, v_n)$ $w = (w_1, \ldots, w_n)$ kao

$$\langle v, w\rangle = v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Na primer, $(3, 2, 5) \cdot (-1, 0, 2) = -3 + 0 + 10 = 7$.
Možemo koristiti bilo koji unutrašnji proizvod da formiramo *normu*.

Činjenica 42
Za unutrašnji proizvod, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, funkcija $\|v\| = \langle v, v\rangle$ je norma.

Dokaz. Četvrto svojstvo unutrašnjih proizvoda odmah daje treće svojstvo normi.
Da bi pokazali prvo svojstvo normi, primetimo da je

$$\langle cv, cv\rangle = c\langle v, cv\rangle = c\langle cv, v\rangle = c^2\langle v, v\rangle,$$

i uzimanje kvadratnog korena obe strane i korišćenje $\sqrt{c^2} = |c|$ završava dokaz.
Drugo svojstvo normi (nejednakost trougla) je ekvivalentno činjenici o kojoj ćemo kasnije raspravljati pod nazivom Koši-Švarcova nejednakost. □

Definicija 45
Zvaćemo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ **norma unutrašnjeg proizvoda**.

Za skalarni proizvod,

$$\|v\| = (v \cdot v)^{1/2} = \left(\sum_{i=1} v_i^2\right)^{1/2}.$$

Ovo je isto što i *Euklidska dužina* ili L_2 *norma* vektora

14.3 Kovarijansa, varijansa i standardna devijacija

Dakle, za naš vektorski prostor centriranih slučajnih promenljivih, šta bi trebalo da bude naš unutrašnji proizvod biti? Koristimo nešto vrlo jednostavno, srednju vrednost proizvoda od dve slučajne promenljive. Ovo nazivamo *kovarijansa*. Kovarijansa (unutrašnji proizvod) između dve centrirane slučajne promenljive je

$$\mathrm{Cov}(X_c, Y_c) = \mathbb{E}[X_c Y_c].$$

Ako promenljive već nisu centrirane, onda ih centrirajte pre uzimanje unutrašnjeg proizvoda.

Definicija 46
Kovarijansa dve integrabilne slučajne promenljive X i Y je

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

kada ova očekivanja postoje.

Linearnost očekivanja daje pojednostavljenje ovog izraza.

Činjenica 43
Za integrabilne sl. prom. X i Y takve da je XY integrabilna,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Dakle, drugi način da se sagleda kovarijansa je da ona meri koliko je očekivanje proizvoda daleko od proizvoda očekivanja.

Dokaz. Primetimo

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]Y + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Izvlačenjem konstanti i korišćenje linearnosti dobijamo

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

i simplifikacijom dobijamo traženi rezultat. □

Činjenica 44
Kovarijansa je unutrašnji proizvod.

Dokaz. Neka su X_c, Y_c, i W_c tri centrirane sl. prom., i $a \in \mathbb{R}$. Tada svojstva slede iz linearnosti očekivanja.

1. Distributivnost:
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_c + Y_c, W_c) &= \mathbb{E}[(X_c + Y_c)W_c] = \mathbb{E}[X_c W_c + Y_c W_c] \\ &= \mathbb{E}[X_c W_c] + \mathbb{E}[Y_c W_c] = \mathrm{Cov}(X_c, W_c) + \mathrm{Cov}(Y_c, W_c).\end{aligned}$$

2. Skaliranje:
$$\mathrm{Cov}(aX_c, Y_c) = \mathbb{E}[aX_c Y_c] = a\mathbb{E}[X_c Y_c] = a\,\mathrm{Cov}(X_c, Y_c).$$

3. Komutativnost:
$$\mathrm{Cov}(X_c, Y_c) = \mathbb{E}[X_c Y_c] = \mathbb{E}[Y_c X_c] = \mathrm{Cov}(Y_c, X_c).$$

4. Samo-proizvod
$$\mathrm{Cov}(X_c, X_c) = \mathbb{E}[X_c^2] \geq 0$$
jer $X_c^2 \geq 0$.
Sad pretpostavimo da je $\mathbb{E}[X_c^2] = 0$. Za svako $\epsilon > 0$,
$$\mathbb{E}[X_c^2] \geq \mathbb{E}[X_c^2 \mathbb{1}(X_c > \epsilon] \geq \mathbb{E}[\epsilon^2 \mathbb{1}(|X_c| > \epsilon)] = \epsilon^2 \mathbb{P}(|X_c| > \epsilon)],$$
dakle za sve $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_c| > \epsilon) = 0$, i $\mathbb{P}(X_c = 0) = 1$.

□

Pošto je kovarijansa unutrašnji proizvod, to znači da nam daje normu unutrašnjeg proizvoda. Ova norma se naziva *standardna devijacija*. Podsetimo se da je norma kvadratni koren unutrašnjeg proizvoda slučajne promenljive sa samom sobom. U verovatnoći $\mathrm{Cov}(X, X)$ se naziva *varijansa* slučajne promenljive.

Definicija 47
Varijansa integrabilne slučajne promenljive X je $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$. Ako je $\mathbb{V}(X) = \infty$, onda možemo reći da slučajna promenljiva ima beskonačnu varijansu, ili da varijansa ne postoji

Ako stavimo $X = Y$ u $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ odmah dobijamo sledeću karakterizaciju varijanse.

Činjenica 45
Varijansa sl. promenljive X je $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ kada ova očekivanja postoje.

Tada se sama norma unutrašnjeg proizvoda (kvadratni koren varijanse) naziva *standardna devijacija*.

Definicija 48
Standardna devijacija slučajne promenljive sa konačnom varijansom je nenegativni kvadratni koren varijanse.

Činjenica 46
Za sl. prom. X sa konačnom varijansom i $c \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{V}(cX) = c^2\mathbb{V}(X).$$

Dokaz. $\mathbb{V}(cX) = \mathrm{Cov}(cX, cX) = c \cdot c\,\mathrm{Cov}(X, X) = c^2\mathbb{V}(X)$. □

Pošto je standardna devijacija norma ona je uvek nenegativna, i imamo sledeću činjenicu oko skaliranja.

Činjenica 47
Za sl. prom. X sa konačnom varijansom i $c \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{SD}(cX) = |c|\,\mathrm{SD}(X).$$

Dokaz. $\mathrm{SD}(cX) = \sqrt{\mathbb{V}(cX)} = \sqrt{c^2\mathbb{V}(X)} = |c|\sqrt{\mathbb{V}(X)} = |c|\,\mathrm{SD}(X)$. □

Primer 37
Za pitanje dana

$$\mathbb{E}[X^2] = (1/3)(1)^2 + (1/3)2^2 + (1/3)3^2 = 14/3,$$

i $\mathbb{E}[X] = (1+3)/2 = 2$. Dakle

$$\mathbb{V}(X) = 14/3 - 2^2 = 2/3 = 0.6666\ldots,$$

i

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{2/3} = \boxed{0.8164\ldots}.$$

Zadaci

14.1 Neka su $v = (-1, -1, 2)$ i $w = (5, 2, -3)$.

a) Koliko je $v \cdot w$?

b) Šta je $\|v\|$?

14.2 Uzmimo da je $v \cdot w = 4$, $v \cdot y = 6$, i $v \cdot v = 10$.

a) Koliko je $v \cdot (w + y)$?

b) Šta je $3v \cdot (-2w)$?

c) Koliko je $\sqrt{(3v) \cdot (3v))}$?

14.3 Neka je X diskretna sa gustinom $f_X(1) = 0.7$, $f_X(5) = 0.2$, $f_X(10) = 0.1$.

a) Naći $\mathbb{E}[X]$.

b) Naći $\mathrm{SD}[X]$.

14.4 Neka Y ima gustinu

$$f_Y(i) = (1/4)\mathbb{1}(i \in \{3, 5\}) + (1/6)\mathbb{1}(i \in \{7, 9, 11\}).$$

a) Naći $\mathbb{E}[Y]$.

b) Naći $\mathrm{SD}(Y)$.

14.5 Pretpostavimo da $U \sim \mathsf{Unif}([0, 10])$.

a) Šta je centrirana slučajna promenljiva U_c?

b) Kolika je varijansa od U?

14.6 Neka je $T \sim \mathsf{Exp}(3.1)$. Koja je standardna devijacija za T?

14.7 Naka je (X, Y) uniformno nad

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Naći $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

14.8 Pretpostavimo da (X_1, X_2) imaju zajedničku gustinu $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = (2/3)(x + 2y)\mathbb{1}((x, y) \in [0, 1]^2)$. Koja je $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$?

14.9 Tačno ili netačno: slučajna promenljiva sa konačnim očekivanjem uvek ima konačnu standardnu devijaciju.

14.10 Neka su X_1, X_2, X_3 iid $\mathsf{Unif}(\{1, 2, \ldots, 6\})$. Neka je $S = \inf\{X_i\}$.

a) Koja je očekivana vrednost za S?

b) Koja je varijansa od S?

14.11 Za slučajnu promenljivu sa konačnim očekivanjem μ, i standardnom devijacijom σ, *iskrivljenost (skewness)* slučajne promenljive je definisana sa

$$\mathrm{skew}(X) = \mathbb{E}\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right].$$

a) Ako X ima iskrivljenost 3, kolika je iskrivljenost od $2X$?

b) Kolika je iskrivljenost od $-2X$?

14.12 Za $T \sim \mathsf{Exp}(1)$, naći iskrivljenost od T.

14.13 Naći iskrivljenost od $U \sim \mathsf{Unif}([0, 1])$.

14.14 Neka je $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$. Naći iskrivljenost od Z.

14.15 Topper Building Co. trpi broj kašnjenja koji je uniforman na $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Svako kašnjenje košta graditelja eksponencijalno vreme sa parametrom 0.3 mesečno. Nađite očekivanje i varijansu ukupnog vremena kašnjenja.

14.16 Pretpostavimo da su X_1, X_2, X_3 iid uniformne nad $\{1, 2, \ldots, 6\}$ i $S \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3\})$. Naći varijansu od

$$\sum_{i=1}^{S} X_i.$$

Glava 15

Korelacija

Pitanje dana Neka (X, Y) ima uniformnu raspodelu na

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1)\}.$$

Kolika je korelacija između X i Y?

Sažetak
Koši-Švarcova nejednakost kaže da za bilo koji unutrašnji proizvod i vektore x i y,

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle.$$

Za slučajne promenljive X i Y takve da su XY, X^2 i Y^2 integrabilne, **korelacija** između X i Y je

$$\operatorname{Cor}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\operatorname{SD}(X)\operatorname{SD}(Y)}.$$

U pitanju dana, X i Y nisu nezavisne: Ako uslovimo da je $X = 0$ onda $Y \sim \mathsf{Unif}(\{0, 1, 2\})$, a ako je $X = 1$, onda $Y \sim \mathsf{Unif}(\{0, 1\})$. Ili, alternativan dokaz:

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/5,$$

but

$$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = (2/5)(2/5) = 4/25 \neq 1/5.$$

S druge strane, one nisu potpuno zavisne jedna od druge. Znajući vrednost X ne određuje u potpunosti Y, a poznavanje Y ne određuje u potpunosti X. Dakle, želimo da na neki način opišemo koliko su slučajne promenljive zavisne jedna od druge.

15.1 Koši-Švarcova nejednakost

Veoma važna činjenica o unutrašnjim proizvodima i normi unutrašnjeg proizvoda je nejednakost Koši-Švarca.

Teorema 5 (Koši-Švarcova nejednakost)
Za bilo koji unutrašnji proizvod i vektore x i y:

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle.$$

ili u terminima norme unutrašnjeg proizvoda:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

štaviše, jednakost se dobija samo ako postoji skalar α takav da $x = \alpha y$ ili $y = \alpha x$.

Koši-Švarcova nejednakost znači da je vrednost razlomka

$$\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|},$$

između -1 i 1. Možda se sećate sledeće zanimljive činjenice iz geometrije. Ako je θ ugao između $v, w \in \mathbb{R}^n$, onda

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|},$$

Dakle, ako je ovaj količnik na desnoj strani 1, onda je $\theta = 0$ i vektori su usmereni u istom pravcu. Ako je odnos -1, onda $\theta = \tau/2$, a vektori su okrenuti u suprotnim smerovima. Ako je odnos 0, onda je $\theta = \tau/4$ ili $\theta = -\tau/4$, a vektori su upravni (ortogonalni) jedan prema drugom.

15.2 Uglovi i korelacija

Zaista nema smisla govoriti o uglu između dve slučajne promenljive. Međutim, znamo iz Koši-Švarca da je količnik

$$\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\operatorname{SD}(X)\operatorname{SD}(Y)} \in [-1, 1].$$

Dakle, ovoj količini dajemo ime, nazivamo je *korelacija* između dve slučajne promenljive.

Definicija 49
Za X i Y takve da su XY, X^2 and Y^2 integrabilne, **korelacija** između X i Y se definiše kao

$$\operatorname{Cor}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\operatorname{SD}(X)\operatorname{SD}(Y)}.$$

Činjenica 48
Korelacija je između -1 i 1.

Dokaz. Iz Činjenice 44, znamo da je kovarijansa unutrašnji proizvod. Tako da rezultat sledi direktno iz nejednakosti Koši-Švarca. □

Odgovorimo sada na pitanje dana. Za izračunavanje je potrebno pronaći vrednosti od $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[X^2]$, i $\mathbb{E}[Y^2]$. Pošto su ovo diskretne slučajne promenljive, očekivanja se mogu naći pomoću sume.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{5}\,[0+0+0+1+1] = \frac{2}{5} \\
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{5}\,[0+1+2+0+1] = \frac{4}{5} \\
\mathbb{E}[XY] &= \frac{1}{5}\,[0+0+0+0+1] = \frac{1}{5} \\
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{5}\,[0+0+0+1+1] = \frac{2}{5} \\
\mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{5}\,[0+1+4+0+1] = \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

Tako

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = (1/5) - (2/5)(4/5) = -3/25 \\
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = (2/5) - (2/5)^2 = 6/25 \\
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = (6/5) - (4/5)^2 = 14/25.
\end{aligned}$$

Stavljajući ovo zajedno,

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{-3/25}{\sqrt{(6/25)(14/25)}} = \frac{-3}{\sqrt{84}} \approx \boxed{-0.3273}.$$

Dakle, X i Y su u negativnoj korelaciji. To znači da će, u proseku, kada je jedan veći, drugi biti manji od njegove prosečne vrednosti.

15.3 Nezavisnost i korelacija

Kada dve slučajne promenljive imaju korelaciju 0, kažemo da su *nekorelirane.*

Definicija 50
Slučajne promenljive X i Y su **nekorelirane** ako njihova korelacija postoji i jednaka je 0.

Ako je korelacija između dve slučajne promenljive X i Y 0, to znači da poznavanje X ne menja *prosečnu* vrednost od Y. Međutim, to ne znači da su X i Y nezavisne!

Da vidimo zašto, uzmimo

$$(X,Y) \sim \mathsf{Unif}(\{(1,1),(1,-1),(-1,2),(-1,-2)\}).$$

Primetimo da ako je $X=1$ onda $\mathbb{E}[Y|X=1]=0$, i ako $X=-1$ onda $\mathbb{E}[Y|X=-1]=0$. Dakle poznavanje X ne menja prosečnu vrednost od Y.

Direktnije:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = (1/4)[1-1-2+2] - (0)(0) = 0.$$

Međutim, znajući da je $X=1$ znači da je $Y \in \{1,-1\}$, a ako je $X=-1$ onda $Y \in \{2,-2\}$, tako da X i Y nisu nezavisne. Drugim rečima

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = 1/4, \text{ ali } \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) = (1/2)(1/4) = 1/8.$$

Iako nije uvek tačno da su nekorelirane slučajne promenljive nezavisno, važi uvek da su nezavisne slučajne promenljive nekorelirane.

Činjenica 49
Ako su X i Y nezavisne i korelacija postoji, onda su one nekorelirane.

Dokaz. Neka X i Y sa konačnom kovarijansom imaju gustinu $f_{X,Y}$. Onda

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int f_{X,Y}(x,y)\, d\mu(x,y) \\
&= \int_x \int_y f_X(x) f_Y(y)\, d\mu(y)\, d\mu(x) && \text{prema Toneliju} \\
&= \int_x f_X(x) \int_y f_Y(y)\, d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&= \int_x f_X(x)\mathbb{E}[Y]\, d\mu(x) \\
&= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

Dakle $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ i one su nekorelirane. □

Zadaci

15.1 Za $(X,Y) \sim \mathsf{Unif}(\{(0,0),(0,2),(1,2)\})$, naći korelaciju između X i Y.

15.2 Za (W,Z) uniformno nad $\{(0,1),(1,0),(2,2)\}$, naći korelaciju između W i Z

15.3 Za (A,B) sa gustinom

$$f_{(A,B)}(a,b) = (2/3)(a+2b)\mathbb{1}(a \in [0,1])\mathbb{1}(b \in [0,1]),$$

naći $\mathrm{Cor}(A,B)$.

15.4 Za (X,Y) sa gustinom $f_{X,Y}(x,y) = 2\exp(-x-2y)\mathbb{1}(x,y \geq 0)$, naći $\mathrm{Cor}(X,Y)$.

15.5 Razmotrimo slučajne promenljive X i Y sa zajedničkom gustinom

$$f_{(X,Y)}(x,y) = C\exp(-x-xy-y)\mathbb{1}(x \geq 0, y \geq 0).$$

a) Naći kovarijansu između X i Y numerički.
b) Naći korelaciju između X i Y numerički.

15.6 Neka je

$$f_{(X,Y)}(r,s) = \frac{1}{C} \cdot \frac{r+s}{r}\mathbb{1}(r \in [1,2], s \in [0,1]).$$

a) Naći vrednost C.
b) Naći gustinu za Y.
c) Naći $\mathrm{Cor}(X,Y)$.

Glava 16

Zbir slučajnih promenljivih

Pitanje dana Neka su $X \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ i $Y \sim \mathsf{Exp}(4)$ nezavisne. Koliko je $\mathbb{V}[X+Y]$?

Sažetak Za bilo koje slučajne promenljive X i Y sa konačnim varijansama i kovarijansama,

$$\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Za konačan skup sl. promenljivih,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Generalno, ako X i Y imaju gustine f_X i f_Y u odnosu na μ, tada $f_{X+Y} = f_X * f_Y$, gde je $*$ konvolucijski operator definisan kao

$$[f * g](s) = \int_x f(x)g(s-x)\,d\mu.$$

16.1 Varijansa zbira

Prisetimo se da je

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Ovo sledi iz distributivnih zakona.

Pošto je varijansa samo unutrašnji proizvod vektora sa samim sobom (poput kvadrata broja), ista formula se primenjuje na dve slučajne promenljive.

Činjenica 50
Neka X i Y imaju konačne varijanse i kovarijansu. Tada

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Dokaz. Podsetimo, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ je unutrašnji proizvod između X i Y. Unutrašnji proizvodi su distributivni i komutativni, a varijansa jeste kovarijansa slučajne promenljive sa samom sobom, dakle

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y) &= \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y)\\ &= \mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)+\mathrm{Cov}(Y,Y)\\ &= \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y).\end{aligned}$$

□

Ovaj isti argument se može proširiti na zbir n slučajnih promenljivih.

Činjenica 51
Neka $X_1, \ldots, X_n$ imaju konačne varijanse i svi parovi imaju konačne kovarijanse. Onda

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Konkretno ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, tada je varijansa zbira jednaka zbiru varijansi.

Ovo je takođe poznato kao Pitagorina teorema, jer ako su dva vektora pomeranja a i b pod pravim uglom, onda je $a \cdot b = 0$, i

$$\|a+b\|^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + b\cdot b + 2\cdot 0 = \|a\|^2 + \|b\|^2\,.$$

Dakle, činjenica da je za pravougli trougao dužina hipotenuze na kvadrat jednaka zbiru kvadrata kateta, potpuno je ista kao i činjenica da je varijansa zbira nekoreliranih slučajnih promenljivih zbir varijansi!

16.2 Standardna devijacija uzoračkog proseka

Ovo svojstvo dovodi do sledećeg rezultata o uzoračkim prosecima iid slučajnih promenljivih.

Činjenica 52
Neka su $X_1, \ldots, X_n \sim X$ iid slučajne promenljive gde X ima konačnu varijansu, i

$$S = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Onda

$$\mathrm{SD}(S) = \frac{\mathrm{SD}(X)}{\sqrt{n}}.$$

Dokaz. Pošto $X_i \sim X$, $\mathrm{SD}(X_i) = \mathrm{SD}(X)$ za sve i. To zanči

$$\mathbb{V}(S) = \frac{1}{n^2}[\mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)] = \frac{n\mathbb{V}(X)}{n^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{n},$$

i uzimanje kvadratnog korena obe strane završava dokaz. □

16.3 Konvolucije

Neka $X \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3\})$ i $Y \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4,5,6\})$. Kakva je raspodela $X+Y$? Pa, znamo da je $X + Y \in \{2, 3, \ldots, 9\}$, ali kako da izračunamo verovatnoće? Sumiramo preko svih stanja koja vode do te realizacije.

Na primer,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=7) &= \sum_{i\in\{1,2,3\}} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(X+Y=7|X=i) \\
&= \sum_{i\in\{1,2,3\}} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=7-i) \\
&= (1/3)(1/6) + (1/3)(1/6) + (1/3)(1/6) \\
&= 1/6 = 0.1666\ldots.
\end{aligned}$$

Uopštenije, važi sledeće.

Činjenica 53
Neka su X i Y nezavisne, sa gustinama f_X i f_Y u odnosu na μ. Onda

$$f_{X+Y}(s) = \int_x f_X(x) f_Y(s-x)\, d\mu(x) = \int_y f_Y(y) f_X(s-y)\, d\mu(y).$$

Ovaj operator se naziva *konvolucija* gustina.

Definicija 51
Konvolucija realnih funkcija f i g u odnosu na meru μ je

$$[f * g](s) = \int_x f(x) g(s-x)\, d\mu.$$

Primer 38
Neka su $X \sim \mathsf{Exp}(2)$ i $Y \sim \mathsf{Exp}(1)$ nezavisne. Koja je gustina za $X+Y$?

Odgovor Gustine za X i Y su

$$f_X(x) = 2\exp(-2x)\mathbb{1}(x \geq 0)$$
$$f_Y(y) = \exp(-y)\mathbb{1}(y \geq 0)$$

Konvolucijom se dobije gustina sume:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(s) &= \int_x f_X(x) f_Y(s-x)\, dx \\ &= \int_x 2\exp(-2x)\mathbb{1}(x \geq 0)\exp(-(s-x))\mathbb{1}(s-x \geq 0)\, dx \end{aligned}$$

Ako je $s < 0$, onda $\mathbb{1}(x \geq 0)\mathbb{1}(x \leq s) = 0$, tako da, pretpostavimo da je $s \geq 0$. Onda

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(s) &= \int_{x=0}^{s} 2\exp(-s-x)\, dx \\ &= \frac{2}{-1}\exp(-s-x)|_{x=0}^{s} \\ &= -2[\exp(-2s) - \exp(-s)]. \end{aligned}$$

Spajanje oba slučaja za s zajedno daje

$$\boxed{f_{X+Y}(s) = 2[\exp(-s) - \exp(-2s)]\mathbb{1}(s \geq 0).}$$

Uopšteno govoreći, ako X i Y nisu nezavisni, onda da bi našli gustinu za $X+Y$, potrebna nam je zajednička gustina za X i Y.

Činjenica 54
Neka X i Y imaju zajedničku gustinu $f_{X,Y}$ u odnosu na proizvod mera μ. Onda

$$f_{X+Y}(s) = \int_x f_{X,Y}(x, s-x)\, d\mu(x) = \int_y f_{X,Y}(s-y, y)\, d\mu(y).$$

Zadaci

16.1 Neka su $A \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ i $B \sim \mathsf{Unif}([0,2])$ nezavisne. Naći gustinu za $A+B$.

16.2 Pretpostavimo $X \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ i $Y \sim \mathsf{Exp}(2)$. Naći gustinu za $X+Y$.

16.3 Pretpostavimo da su $X \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3\})$ i $Y \sim \mathsf{Unif}(\{3,5\})$ nezavisne. Koja je gustina od $X+Y$?

16.4 Pretpostavimo da su X_1 i X_2 iid $\mathsf{Unif}(\{1,2,3,4\})$. Naći gustinu od $X+Y$.

16.5 Neka su R i G diskretne slučajne promenljive gde je $R \sim \text{Bern}(0.3)$ i $G \sim \text{Geo}(0.6)$. Tako je

$$f_R(i) = (0.3)\mathbb{1}(i = 1) + (0.7)\mathbb{1}(i = 0), \ f_G(i) = (0.6)(0.4)^{i-1}\mathbb{1}(i \in \{1, 2, \dots\}.$$

Naći gustinu za $R + G$.

16.6 Neka su X i Y nezavisne, diskretne slučajne promenljive sa $f_X(1) = 0.2$, $f_X(2) = 0.3$ i $f_x(3) = 0.5$, dok je $f_Y(1) = 0.5$, $f_y(2) = 0.1$, $f_Y(3) = 0.4$. Naći gustinu za $X + Y$.

Glava 17

Funkcija generatrisa momenata

Pitanje dana Neka se $A_1, \ldots, A_{10}$ iid uniformne na $\{1, 2, 3\}$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(A_1 + \cdots + A_{10} = 20)$?

Sažetak
Funkcija generatrisa slučajne promenljive X je data kao

$$\mathrm{gf}_X(s) = \mathbb{E}[s^X].$$

Funkcija generatrisa momenata slučajne promenljive X je takva funcija da je

$$\mathrm{mgf}_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)].$$

Funkcija generatrisa momenata za X je dovoljna za definisanje raspodele za X. Za $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne,

$$\mathrm{mgf}_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \mathrm{mgf}_{X_1}(t)\,\mathrm{mgf}_{X_2}(t)\cdots\mathrm{mgf}_{X_n}(t).$$

U ovom poglavlju ćemo naučiti o novom načinu kodiranja raspodela verovatnoće. Ovaj metod ne koristi verovatnoće, već umesto toga koristi očekivanu vrednost na određeni način. Prednost ovog kodiranja je u tome što ako znate kodiranje za konačni skup nezavisnih slučajnih promenljivih, lako je pronaći kodiranje za njihov zbir.

17.1 Funkcije generatrise

Počnimo sa jednostavnim primerom. Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa gustinama

$$\begin{aligned} f_X(i) &= 0.3\mathbb{1}(i=1) + 0.3\mathbb{1}(i=2) + 0.4\mathbb{1}(i=3) \\ f_Y(i) &= 0.5\mathbb{1}(i=1) + 0.5\mathbb{1}(i=-1). \end{aligned}$$

Ovo znači da je $\mathbb{P}(X \in \{1,2,3\}) = \mathbb{P}(Y \in \{-1,1\}) = 1$. Razmotrimo problem nalaženja $\mathbb{P}(X+Y=2)$. Postoje dva načina na koja zbir X i Y može biti 2. Ili ako je $X = 1$ i $Y = 1$, ili ako je $X = 3$ i $Y = -1$. Dakle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=2) &= \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=3, Y=-1)\\ &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(Y=-1)\\ &= (0.3)(0.5) + (0.4)(0.5) = 0.35.\end{aligned}$$

Sada razmatramo kodiranje za X i Y koje nam govori sve o vrednostima koje uzimaju i verovatnoćama sa kojima uzimaju te vrednosti. Napravite polinomski izraz od s. Koeficijent c člana cs^i u polinomu biće verovatnoća da je $X = i$. Zatim dodajmo sve zajedno.

Pošto je $X = 1$ sa verovatnoćom 0.3, počnimo sa sabirkom $0.3s$. Verovatnoća $\mathbb{P}(X = 2) = 0.3$ daje član $0.3s^2$, a $\mathbb{P}(X = 3) = 0.4$ daje član $0.4s^3$. Sabriranje daje polinomnu funkciju:

$$f(s) = 0.3s + 0.3s^2 + 0.4s^3.$$

Primetimo da ova funkcija u potpunosti opisuje raspodelu od X.

Možemo da uradimo nešto slično za Y.

$$g(s) = 0.5s^1 + 0.5s^{-1}.$$

Ograničićemo se na $s > 0$ da bi obezbedili da je sve dobro definisano.

Sada pogledajmo šta se dešava kada pomnožimo ova dva polinoma zajedno:

$$\begin{aligned}f(s)g(s) &= (0.3s + 0.3s^2 + 0.4s^3)(0.5s + 0.5s^{-1})\\ &= (0.3)(0.5)s^2 + (0.3)(0.5)s^3 + (0.4)(0.5)s^4 + (0.3)(0.5)s^0 + (0.3)(0.5)s^1 + (0.3)(0.5)s^2\\ &= 0.15s^0 + 0.15s + 0.35s^1 + 0.15s^2 + 0.15s^3 + 0.2s^4.\end{aligned}$$

Pogledajmo u koeficijent uz s^2. On dolazi od zbira $(0.3)(0.5) + (0.4)(0.5)$, pošto množenje $s^1 s^1$ daje s^2 kao i što $s^3 s^{-1}$ daje s^2.

Drugim rečima, množenje kodova je rezultiralo faktorom s^2 koji je tačno ponovio način na koji smo pronašli $\mathbb{P}(X + Y = 2)$. Ovo nije slučajnost!

Postoji još jedan način da se opiše kako je ovaj polinom formiran. Ako zbrojite verovatnoću da je $X = i$ puta s^i za svako i, ovo je samo

$$\mathbb{E}[s^X]$$

po našem pravilu za očekivanje funkcije od X. X je eksponent ovde jer je vrednost i u eksponentu od s.

Definicija 52
Funkcija generatrisa[a] slučajne promenljive X je definisana kao $\mathrm{gf}_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$.

[a] *eng. generating function*

Prvo jedna jednostavna činjenica.

Činjenica 55
Za bilo koju slučajnu promenljivu $\mathrm{gf}_X(1) = 1$.

U našem prethodnom primeru,

$$f(1) = 0.3 \cdot 1^1 + 0.3 \cdot 1^2 + 0.4 \cdot 1^3 = 0.3 + 0.3 + 0.4,$$

tako da je $\mathrm{gf}_X(1) = 1$ samo još jedan način da se kaže da zbir verovatnoća kod slučajne promenljive mora biti jednak 1.

Drugo, znamo zašto su funkicije generatrise korisne.

Činjenica 56
Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive. Tada važi $\mathrm{gf}_{X+Y}(s) = \mathrm{gf}_X(s)\,\mathrm{gf}_Y(s)$.

Dokaz. Neka su X i Y nezavisne. Tada za bilo koje $s > 0$, s^X i s^Y su takođe nezavisni. Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[s^{X+Y}] &= \mathbb{E}[s^X s^Y] \\ &= \mathbb{E}[s^X]\mathbb{E}[s^Y],\end{aligned}$$

i gotovi smo! □

Primer 39
Što se tiče pitanja dana, pošto dodajemo 10 iid kopija slučajne promenljive zajedno, moramo pomnožiti funkciju generatrisu deset puta. To je

$$\mathrm{gf}_{A_1+\cdots+A_{10}}(s) = \mathrm{gf}_{A_1}(s)\cdots\mathrm{gf}_{A_{10}}(s) = \mathrm{gf}_A(s)^{10}.$$

Koristeći Wolfram Alpha da razvijemo $[(1/3)s + (1/3)s^2 + (1/3)s^3)]^{10}$, dobijamo

$$\frac{1}{3^{10}}s^{30} + \frac{10}{3^{10}}s^{29} + \cdots + \frac{8953}{3^{10}}s^{20} + \cdots + \frac{1}{3^{10}}s^{10},$$

i odgovor je $8953/3^{10} = \boxed{0.1516\ldots}$.

17.2 Funkcija generatrisa momenata

Pošto je $s > 0$, možemo reći da je $s = e^t$ za neko t. Ako zapišemo funkciju generatrisu kao funkciju od t umesto s, imamo *funkciju generatrisu momenata*[3].

Definicija 53
Funkcija generatrisa momenata slučajne promenljive X se definiše kao $\mathrm{mgf}_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)]$ za sve vrednosti t gde to očekivanje postoji.

Primer 40
Neka X ima gustinu

$$f_X(i) = 0.2\mathbb{1}(i=3) + 0.7\mathbb{1}(i=6) + 0.1\mathbb{1}(i=8).$$

Naći funkciju generatrisu momenata za X?

Rešenje Ovde je $X \in \{3, 6, 8\}$, tako da je funkcija generatrisa momenata jednaka

$$\begin{aligned}\mathrm{mgf}_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] &= \sum_{i\in\{3,6,8\}} \exp(ti) f_X(i) \\ &= \boxed{0.2\exp(3t) + 0.7\exp(6t) + 0.1\exp(8t).}\end{aligned}$$

[3] *eng. moment generating function*

Imajte na umu da se rezultati sada pojavljuju kao koeficijenti od t unutar eksponencijalnih funkcija, dok verovatnoće ostaju kao koeficijenti izvan eksponencijalnih funkcija.

Primer 41
Neka X ima sledeću funkciju generatrisu momenata

$$0.6\exp(-2t) + 0.4\exp(4t).$$

Naći gustinu od X?

Rešenje Da bi dobili ovu funkciju generatrisu momenata mora biti da je

$$f_X(i) = 0.6\mathbb{1}(i=-2) + 0.4\mathbb{1}(i=4).$$

Funkcije generatrise momenata nasleđuju lepo multiplikativno svojstvo od funkcija generatrisa.

Činjenica 57
Neka su X i Y nezavisne sa funkcijama generatrisama momenata u t. Onda

$$\mathrm{mgf}_{X+Y}(t) = \mathrm{mgf}_X(t)\,\mathrm{mgf}_Y(t).$$

17.3 Funkcije generatrise momenata za neprekidne slučajne promenljive

Postupak za pronalaženje funkcije generatrise momenata za neprekidne slučajne promenljive je sličan, iako ćemo koristiti integral, a ne zbir.

Primer 42
Naći funkciju generatrisu momenata za $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$.

Rešenje Pošto je U neprekidna, ako je $t \neq 0$ onda

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(tU)] &= \int_{\mathbb{R}} \exp(ts)\mathbb{1}(s \in [0,1])\,ds = \int_0^1 \exp(ts)\,ds \\ &= \frac{1}{t}\exp(ts)|_0^1 = \frac{\exp(t)-1}{t}.\end{aligned}$$

ako je $t = 0$ rezultat je 1, i dobijamo konačan odgovor

$$\boxed{\mathrm{mgf}_U(t) = \begin{cases} t^{-1}(e^t - 1) & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}}.$$

Napomena Morali smo drugačije da zapišemo naš odgovor za $t \neq 0$ i $t = 0$. Da smo hteli, mogli bismo ovo da napišemo za oba slučaja u isto vreme korišćenjem razvoja u Tejlorov red. Prisetimo se

$$\exp(t) - 1 = t + t^2/2! + \cdots,$$

tako da je

$$\frac{\exp(t)-1}{t} = 1 + t/2! + t^2/3! + \cdots$$

što je definisano za sve t, uključujući $t = 0$ (gde je tačno jednako 1).

17.4 Kako se generišu momenti

Pa zašto se to zove funkcija generatrisa momenata? Podsetimo se da je i-ti momenat slučajne promenljive X definisan kao $\mathbb{E}[X^i]$. Reč momenat proizilazi iz njegove upotrebe u fizici.

Razmotrite slučaj gde

$$\text{mgf}_X(t) = 0.2\exp(3t) + 0.7\exp(6t) + 0.1\exp(8t),$$

i uzimamo izvod u odnosu na t. Za bilo koju konstantu k,

$$[\exp(kt)]' = k\exp(kt),$$

tako da za mgf,

$$[\text{mgf}_X(t)]' = (0.2)(3)\exp(3t) + (0.7)(6)\exp(6t) + (0.1)(8)\exp(8t).$$

Sada ubacimo $t = 0$ tako da je $\exp(k(0)) = 1$ za svako k.

Onda

$$[\text{mgf}_X(t)]'|_{t=0} = (0.2)(3) + (0.7)(6) + (0.1)(8).$$

Ovako nalazimo očekivanu vrednost od X! Množimo vrednosti sa verovatnoćama da se uzmu te vrednosti. Tako

$$[\text{mgf}_X(t)]'|_{t=0} = \mathbb{E}[X].$$

Uzmimo izvod od $[\text{mgf}_X(t)]'$. Tada dobijamo

$$[\text{mgf}_X(t)]'' = (0.2)(3)^2\exp(3t) + (0.7)(6)^2\exp(6t) + (0.1)(8)^2\exp(8t).$$

Izračunavanje za $t = 0$ pretvara sve eksponencijalne sabirke u 1, tako da je

$$[\text{mgf}_X(t)]''|_{t=0} = (0.2)(3)^2 + (0.7)(6)^2 + (0.1)(8)^2 = \mathbb{E}[X^2].$$

Zašto se ovo dešava? Pa, pretpostavimo da bismo mogli da unesemo izvod unutar operatora očekivanja. To bi značilo da

$$\frac{d\mathbb{E}[\exp(tX)]}{dt} = \mathbb{E}\left[\frac{d\exp(tX)}{dt}\right] = \mathbb{E}[X\exp(tX)].$$

Ako zatim ubacimo $t = 0$, dobićemo $\mathbb{E}[X]$. Ako diferenciramo dva puta (i opet pod pretpostavkom da možemo da unesemo derivat unutra operator očekivanja) dobijamo

$$\frac{d^2\mathbb{E}[\exp(tX)]}{dt^2} = \mathbb{E}\left[\frac{d^2\exp(tX)}{dt^2}\right] = \mathbb{E}[X^2\exp(tX)].$$

Ovog puta ubacujemo $t = 0$ i dobijemo $\mathbb{E}[X^2]$, drugi momenat. Ovaj obrazac se nastavlja.

Činjenica 58
Neka X ima funkciju generatrisu momenata definisanu na netrivijalnom intervalu koji sadrži $t = 0$. Onda je i-ti izvod funkcije generatrise momenata za X izračunat u $t = 0$ jednak $\mathbb{E}[X^i]$.

Naša ranija ilustracija koristila je diskretnu slučajnu promenljivu, ali ovo takođe funkcioniše savršeno dobro za neprekidne raspodele.

Primer 43
Korsititе funkciju generatrisu momenata za $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ da nađete očekivanje i varijasnu za U.

Rešenje Setimo se da je Tejlorov red za funkciju generatrisu momenata

$$\mathrm{mgf}_U(t) = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \cdots .$$

Ako diferenciramo jedan put dobijamo

$$[\mathrm{mgf}_U(t)]' = \frac{1}{2} + \frac{2t}{6} + \frac{3t^2}{24} + \cdots .$$

Dakle $[\mathrm{mgf}_U(t)]'|_{t=0} = 1/2 = \mathbb{E}[U] = \boxed{0.5000}$.

Diferenciranjem još jedan put dobijamo

$$[\mathrm{mgf}_U(t)]'' = \frac{2}{6} + \frac{6t}{24} + \cdots$$

i $[\mathrm{mgf}_U(t)]''|_{t=0} = 1/3$.

Dakle varijansa za U je jednaka $(1/3) - (1/2)^2 = 1/12 = \mathbb{V}(U) = \boxed{0.08333}$.

Primetimo da ako koristimo $\mathrm{mgf}_U(t) = (\exp(t) - 1)/t$, onda ovo nije definisano za $t = 0$, ali još uvek možemo da diferenciramo u njegovoj okolini i onda uzmemo limes kad t teži 0. Izvod je jednak

$$\begin{aligned}[\mathrm{mgf}_U(t)]' &= [\exp(t) - 1]' t^{-1} + (\exp(t) - 1)[t^{-1}]' \\ &= t^{-1}\exp(t) - t^{-2}(\exp(t) - 1) \\ &= \frac{t\exp(t) - \exp(t) + 1}{t^2},\end{aligned}$$

što ima limes $1/2$ kad $t \to 0$. (Ovo se može proveriti korišćenjem Lopitalovog pravila dva puta.)

Zadaci

17.1 Neka je $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 0.5$. Naći $\mathrm{mgf}_X(t)$?

17.2 Naći funkciju generatrisu momenata za X sa gustinom

$$f_X(i) = 0.25\mathbb{1}(i = 1) + 0.6\mathbb{1}(i = 2) + 0.15\mathbb{1}(i = 3).$$

17.3 Neka X ima funkciju generatrisu momenata datu sa

$$\mathrm{mgf}_X(t) = 0.1\exp(10t) + 0.9\exp(-5t).$$

Naći gustinu za X.

17.4 Koristeí funkciju generatrisu momenata dokazati da ako je $X \sim \mathsf{Unif}(\{0, 1, 2, \ldots, n-1\})$ i $Y \sim \mathsf{Unif}([0,1])$, onda $X + Y \sim \mathsf{Unif}([0, n])$.

17.5 Neka su $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ iid $\mathsf{N}(0, 1)$. Setimo se da za normalnu $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$, $\operatorname{mgf}_Z(t) = \exp(t^2/2)$.

a) Koja je funkcija generatrisa momenata za $Z_1 + Z_2$?

b) Koja je funkcija generatrisa momenata za

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}?$$

c) Koja je funkcija generatrisa momenata za

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}?$$

17.6 Naka su $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\mathsf{Unif}([0, 1])$. Naći funkciju generatrisu momenata za

$$\frac{U_1 + \cdots + U_n}{\sqrt{n}}.$$

17.7 Neka X ima sledeću gustinu:

$$f_X(r) = \frac{3}{8}(r^3 - 8r^2 + 19r - 12)1(r \in [1, 3]).$$

a) Naći modus(e) za X.

b) Naći median(e) za X.

c) Naći očekivanje od X.

d) Naći $\mathbb{E}[e^{tX}]$.

17.8 Neka je X uniformna na intervalu $[5, 10]$. Koja je funkcija generatrisa momenata za X?

Glava 18

Normalne slučajne promenljive

Pitanje dana Neka su Z_1 i Z_2 iid standardne normalne slučajne promenljive. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(Z_2 > (1/2)Z_1)$?

Sažetak **Standardna normalna** raspodela ima sledeću gustinu u odnosu na Lebegovu meru

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp(-x^2/2).$$

Pišemo $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$, pošto ova sl. prom. ima očekivanje 0 i standradnu devijaciju 1. Za konstante $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, reći ćemo da je $\mu + \sigma Z$ normalna slučajna promenljiva sa očekivanjem μ i varijansom σ^2, i pisati $\mu + \sigma Z \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.

18.1 Normalna raspodela

Normalnu raspodelu je uveo Gaus kao način uklapanja greške u proračunima (istorijski gledano, koristio ga je u pomaganju astronomima da pronađu patuljastu planetu Ceres u asteroidnom pojasu). U svom modernom obliku, raspodela je definisana na sledeći način.

Definicija 54
Neka Z ima gustinu

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp(-z^2/2).$$

Tada kažemo da Z ima **standardnu normalnu raspodelu**, i pišemo $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$.

Neka je $W = \mu + \sigma Z$. Tada kažemo da W ima **normalnu raspodelu** ili **Gausovu raspodelu** sa parametrima μ i σ. I pišemo $W \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.

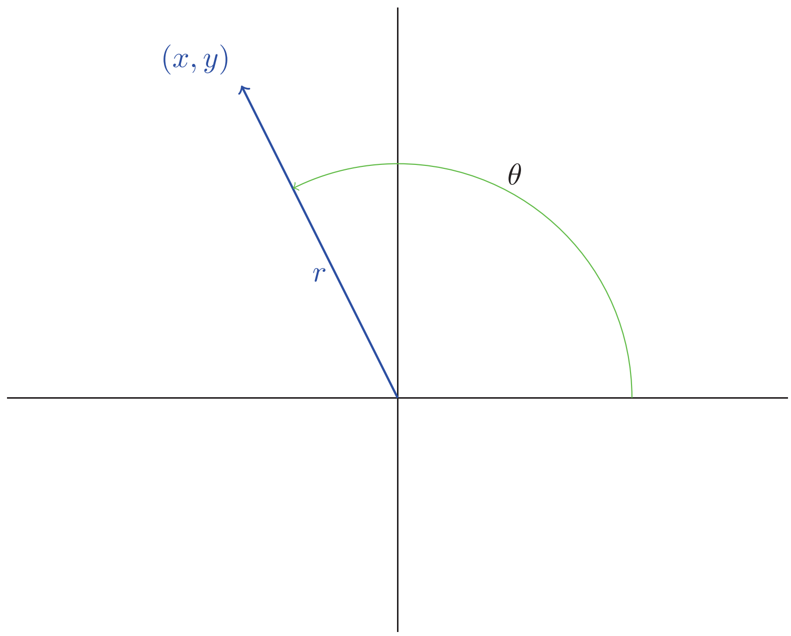
Činjenica 59
Za $W \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathbb{E}[W] = \mu$ and $\mathrm{SD}(W) = \sigma$.

Neki autori (posebno u društvenim naukama) su ovu raspodelu takođe nazvali „zvonasta kriva". Ovo je zaista užasan naziv za ovu raspodelu, jer se podjednako (ako ne i više) odnosi na simetrične beta raspodele i Košijevu raspodelu. To prilično odaje korisnika kao nekoga ko zna samo za normalne raspodele, a ne za drugu bogatu raznolikost gustina, koja postoji u teoriji verovatnoće.

Pri prvom pogledu na gustinu, mogli bi se zapitati šta konstanta punog kruga $\tau = 6.2831\ldots$ radi tamo? Setimo se da je $\tau = 2\pi$, gde je π konstanta polukruga. I zašto je τ unutar kvadratnog korena?

Da bismo odgovorili na ovu misteriju, moramo razmisliti o izvlačenju dve nezavisne normalne. Neka su $Z_1, Z_2 \sim \mathsf{N}(0,1)$ nezavisne. Sada razmislimo o transformaciji ovih Dekartovih koordinata u polarne koordinate.

Podsetimo se da se polarne koordinate za tačku $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koriste rastojanje od koordinatnog početka r i ugao u smeru suprotnom od kazaljke na satu od horizontalne ose u pravcu θ. Ovo je jedna od onih stvari koje se lakše vide na slici:



Dakle, kako da transformišemo iz pravougaonih u polarne koordinate? Koristimo formulu za rastojanje i trigonometrijska pravila da dobijemo

$$r = x^2 + y^2,\ \theta = \arctan(y/x).$$

Za naše slučajne promenljive dobijamo

$$R = Z_1^2 + Z_2^2,\ \theta = \arctan(Z_2/Z_1).$$

Sledeće pitanje koje treba postaviti je kakva je raspodela od R i θ. Da li su nezavisne kao Z_1 i Z_2? Da bismo odgovorili na ovo, potrebna nam još jedna ključna činjenica o transformaciji polarnih koordinata koju ste naučili kod multivarijantnih integrala.

$$dx\ dy = r\ dr\ d\theta.$$

Pošto su Z_1 i Z_2 nezavisne,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_1 \in dx, Z_2 \in dy) = f_{Z_1,Z_2}(x,y)\,dx\,dy &= \frac{1}{\tau}\exp(-x^2/2)\exp(-y^2/2)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{\tau}\exp(-[x^2+y^2]/2)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{\tau}\exp(-r^2/2)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{\tau}r\exp(-r^2/2)\,dr\,d\theta \\
&= \mathbb{P}(R \in dr, \theta \in d\theta).
\end{aligned}$$

Primetite da se ovo faktoriše u činilac koji zavisi samo od R, i činilac koji zavisi samo od θ.

$$\mathbb{P}(R \in dr, \theta \in d\theta) = \left[\frac{1}{\tau}\,d\theta\right]\left[r\exp(-r^2/2)\,dr\right].$$

Pošto je $\theta \in [0,\tau]$, prvi činilac je gustina uniformne na intervalu $[0,\tau]$. Drugi činilac je malo neobičniji sa gustinom $f_R(r) = r\exp(-r^2/2)$. Raspodela sa ovom gustinom zove se *Rejlijeva raspodela* ili *hi kvadrat raspodela sa dva stepena slobode*. Treći način da se misli o R je da $R \sim \sqrt{A}$ gde $A \sim \mathsf{Exp}(1/2)$.

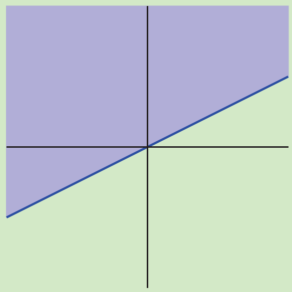
Kada je raspodela od θ uniformna i nezavisna od R, kažemo da je *rotaciono simetrična*.

Definicija 55
Par slučajnih promenljivih je (X,Y) **rotaciono simetričan** ako pri pretvaranju u polarne koordinate (R,θ), θ ima $\mathsf{Unif}([0,\tau])$ i nezavisno je od R.

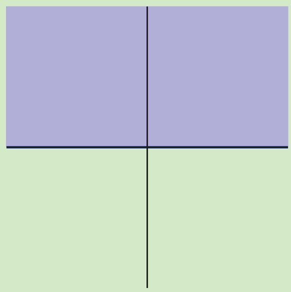
Primetimo da ako dodamo fiksni ugao uglu θ, onda će i dalje biti uniforman nad $[0,\tau]$ (prepoznajući da su ugao s i $s+\tau$ isti ugao.) U praksi to znači da možemo da rotiramo region koliko želimo u rešavanju problema.

Primer 44
Pitanje dana: Za $Z_1, Z_2 \sim \mathsf{N}(0,1)$ iid, koja je verovatnoća da je $Z_2 > (1/2)Z_1$?

Odgovor Oblast izgleda ovako



Ako ga malo rotiramo, izgleda ovako



Tako da
$$\mathbb{P}(Z_2 > (1/2)Z_1) = \mathbb{P}(Z_2 > 0) = 1/2 = \boxed{0.5000}.$$

18.2 Skaliranje i pomeranje normalnih

Neka je $N \sim \mathsf{N}(3, 2^2)$, i pogledajmo $3N$. Znamo da je $N = 3 + 2Z$, gde je Z standardna normalna. Dakle
$$3N = 3(3 + 2Z) = 9 + 6Z.$$
Znači,
$$3N \sim \mathsf{N}(9, 6^2).$$

Činjenica 60
Neka $N \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Tada $a + bN \sim \mathsf{N}(a + b\mu, (b\sigma)^2)$.

Dokaz. Pošto je $N = \mu + \sigma Z$ gde je Z standardna normalna,
$$a + bN = a + b(\mu + \sigma Z) = a + b\mu + (b\sigma)Z,$$
odakle dobijamo odgovor. □

Drugim rečima, pomerena i skalirana normalna slučajna promenljiva je druga pomerena i skalirana normalna slučajna promenljiva!

18.3 Sabiranje nezavisnih normalnih slučajnih promenljivih

Da bismo razumeli šta se dešava kada sabiramo normalne slučajne promenljive, pomaže nam da znamo njihovu funkciju generatrisu momenata.

Činjenica 61
Funkcija generatrisa momenata standardne normalne slučajne promenljive je $\exp(t^2/2)$.

Dokaz. Prisetimo se da je $\operatorname{mgf}_Z(t) = \mathbb{E}[\exp(tZ)]$, tako da

$$\begin{aligned}
\operatorname{mgf}_Z(t) &= \int_z \exp(tz)\tau^{-1/2}\exp(-z^2/2)\,dz \\
&= \int_z \exp(tz - z^2/2)\tau^{-1/2}\,dz \\
&= \int_z \exp(-(z^2 - 2tz)/2)\tau^{-1/2}\,dz \\
&= \int_z \exp(-(z^2 - 2tz + t^2 - t^2)/2)\tau^{-1/2}\,dz \\
&= \int_z \exp(-(z-t)^2/2)\tau^{-1/2}\exp(-(-t^2)/2)\,dz \\
&= \exp(t^2/2)\int_z \exp(-(t-z)^2/2)\tau^{-1/2}\exp(t^2/2)\,dz \\
&= \exp(t^2/2).
\end{aligned}$$

Imajte na umu da je poslednji integral 1 jer je to samo integral preko svih z gustine za $\mathsf{N}(-t, 1)$ slučajnu promenljivu, a integral gustine je uvek 1. □

Činjenica 62
Funkcija generatrisa momenata za $N \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ je

$$\operatorname{mgf}_N(t) = \exp[\mu t + (\sigma^2/2)t^2].$$

Dokaz. Setimo se da za $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$, $\mu + \sigma Z \sim N \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Dakle

$$\begin{aligned}
\operatorname{mgf}_N(t) &= \operatorname{mgf}_{\mu+\sigma Z}(t) \\
&= \mathbb{E}[\exp((\mu + \sigma Z)t)] \\
&= \mathbb{E}[\exp(\mu t)\exp((\sigma t)Z)] \\
&= \exp(\mu t)\mathbb{E}[\exp((\sigma t)Z)] \\
&= \exp(\mu t)\exp((\sigma t)^2/2) \\
&= \exp(\mu t + (\sigma^2/2)t^2)
\end{aligned}$$

□

Činjenica 63
Ako su Z_1 i Z_2 iid normalne slučajne promenljive ($\mathsf{N}(0, 1)$), tada je $Z_1 + Z_2 \sim \mathsf{N}(0, 2)$.

Dokaz. Funkcija generatrisa momenata za $Z_1 + Z_2$ je proizvod funkcija generatrisa momenata. Tako da je

$$\mathrm{mgf}_{Z_1+Z_2}(t) = \exp(t^2/2)\exp(t^2/2) = \exp(2t^2/2) = \exp((\sqrt{2}t)^2/2).$$

Ovo je $\mathbb{E}[\exp(\sqrt{2}Z_1)]$. Drugim rečima, to je funkcija generatrisa momenata od $Z_3 = \sqrt{2}Z_1$. Prema prethodnoj činjenici, ovo ima $\mathsf{N}(0, 2)$ raspodelu . □

Ovo možemo proširiti na sabiranje proizvoljnog broja normalnih slučajnih promenljivih.

Činjenica 64
Za $i \in \{1, \ldots, n\}$, neka su $X_i \sim \mathsf{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ nezavisne. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

Zadaci

18.1 Za standardnu normalnu Z naći verovatnoću

$$\mathbb{P}(Z \in [-2, 2]).$$

18.2 Za Z_1, Z_2 iid $\mathsf{N}(0, 1)$, naći $\mathbb{P}(Z_1 \le -Z_2)$.

18.3 Konferencija Digital Life svake godine privlači broj polaznika koji ima normalnu raspodelu sa očekivanjem $59\,000$ i standardnom devijacijom $10\,000$. Nezavisno od toga, E3 privlači broj polaznika koji je normalno raspodeljen sa očekivanjem $75\,000$ i standardnom devijacijom $5\,000$.

a) Pretpostavimo da uprosečimo dva broja. Kakva je raspodela tog proseka?
b) Kolika je šansa da je prosek dve konferencije veći od $70\,000$?
c) Kakva je raspodela broja onih koji pohađaju Digital Life minus broj onih koji pohađaju E3?
d) Koja je šansa da više ljudi pohađa Digital Life nego E3?

18.4 Neka su $A \sim \mathsf{N}(10, 9), B \sim \mathsf{N}(-5, 5), C \sim \mathsf{N}(7, 2)$ nezavisne. Koja je raspodela proseka ove tri slučajne promenljive?

18.5 Neka su $W_1, \ldots, W_n$ iid standardne normalne slučajne promenljive. Koju raspodelu ima zbir $W_1 + \cdots + W_n$?

18.6 Nadovezujući se na prethodni zadatak, koliko je

$$\mathbb{P}(W_1 + \cdots + W_n \ge 2\sqrt{n})$$

Glava 19

Centralna granična teorema

Pitanje dana Neka su $U_1, \ldots, U_{10} \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ iid. Oceniti $\mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_{10} \geq 6)$ koristeći normalnu aproksimaciju.

Sažetak Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ iid niz slučajnih promenljivuh sa konačnim očekivanjem μ i varijansom σ^2. Onda **Centralna granična teorema** kaže da je

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a \right) = \mathbb{P}(Z \leq a) \right),$$

gde $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$.

Kao što je ranije navedeno, Gaus je koristio normalnu raspodelu za modeliranje grešaka u eksperimentima. Zašto normalna raspodela radi tako dobro? Odgovor leži u aditivnom svojstvu funkcije generatrise momenata.

19.1 Standardizovanje sume

Setimo se da ako je $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ i $\mathrm{SD}(X_i) = \sigma$, onda je

$$S = \frac{X_1 - \mu + X_2 - \mu + \cdots + X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

slučajna promenljiva sa očekivanjem i 0 i standardnom devijacijom 1.

Neka je $X_i \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Iz prethodnog znamo da je

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathsf{N}(n\mu, n\sigma^2),$$

i prema skalirajućim osobinama očekivanja i varijanse

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathsf{N}(0,1).$$

Razmotrimo sledeći proces za slučajnu promenljivu X. Pretpostavimo da su $X_1, \ldots, X_n$ iid sa istom raspodelom kao X, i onda se X_i sabiraju, njihova srednja vrednost se oduzima, a zatim se deli njihovom standardnom devijacijom. Dobijena slučajna promenljiva ima neku (moguće novu) raspodelu. Dakle, ovaj proces uzima raspodelu i vraća (eventualno novu) raspodelu. Ono što gornji proračun kaže je da, ako se standardna normalna raspodela unese u ovaj proces, izlaz je i dalje standardna normalna raspodela. Matematičari ovo zovu *fiksna tačka.*

Evo jednostavnijeg primera fiksne tačke za proces. Pretpostavimo da smatram da je unet broj x i vraća

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + 1.$$

Primetimo da je $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \frac{2}{2} + 1 = \sqrt{2}$. Drugim rečima, $\sqrt{2}$ je fiksna tačka za ovaj proces.

Sada pretpostavimo da započnemo sa vrednošću koja nije $\sqrt{2}$, na primer 1. Onda je $f(1) = 1 - 1/2 + 1 = 3/2$. Dalje $f(3/2) = 3/2 - 9/8 + 1 = 11/8$, i $f(11/8) = 183/128$, i tako dalje.

Dalje je $(183/128)^2 = 33489/16384 = 2.044\ldots$, tako da $183/128$ mora biti vrlo blizu $\sqrt{2}$. Drugim rečima, kako iznova i iznova primenjujemo funkciju na vrednosti x, rezultat konvergira fiksnoj tački što je koren iz dva.

Ovakva vrsta ponašanja vidi se na mnogim mestima u matematici, uključujući atraktore u sistemima diferencijalnih jednačina i ergodičku teoremu u teoriji lanaca Markova. U mnogim slučajevima, primena procesa na matematički objekat dovodi do toga da se objekat pomeri bliže fiksnoj tački procesa.

19.2 CGT

Ovo ponašanje fiksne tačke za normalne se manifestuje na sledeći način. Počnimo sa slučajnom promenljivom X sa očekivanjem 0 i standardnom devijacijom 1. Onda za $X_1, X_2, \ldots$ iid X,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

počinje sve više da liči na standardnu normalnu što je veći n.

Šta ako X nema srednju vrednost 0 i standardnu devijaciju 1? Dobro, onda standardizujemo slučajnu promenljivu oduzimanjem od nje očekivanje i deljenjem njenom standardnom devijacijom. To dovodi do važnog rezultata u verovatnoći koji se zove *Centralna granična teorema* ili CGT.

Teorema 6 (Centralna granična teorema)
Neka je X slučajna promenljiva sa očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ. Onda za bilo koje $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) = \mathbb{P}(Z \leq a),$$

gde je Z standardna normalna slučajna promenljiva.

Ovu činjenicu možemo iskoristiti da aproksimiramo verovatnoću da je zbir slučajnih promenljivih manji ili veći od nekog broja.

Primer 45
Uzmimo $U_1, \ldots, U_{10} \sim \mathsf{Unif}([0,1])$. Koristeći CGT aproksimirati verovatnoću da je $U_1 + \cdots + U_{10} \geq 7$.

Rešenje Da bi iskoristili CGT, prvo treba da nađemo $\mu = \mathbb{E}[U]$ i $\sigma = \mathrm{SD}(U)$. Direktnim računom dobijamo $\mu = 1/2$ i $\sigma = 1/\sqrt{12}$. Zapamtite da bilo šta što uradite na jednoj strani nejednakosti morate učiniti i na drugoj strani, tako da

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_{10} \geq 7) &= \mathbb{P}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_{10} - 10(1/2)}{\sqrt{1/12} \cdot \sqrt{10}} \geq \frac{7 - 10(1/2)}{\sqrt{1/12}\sqrt{10}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{7 - 10(1/2)}{\sqrt{1/12}\sqrt{10}}\right).\end{aligned}$$

Koristeći komandu `pnorm` u R dobijamo da je poslednja verovatnoća jednaka $\boxed{0.01422\ldots}$.

Koliko je dobra ova aproksimacija? To može biti teško da se oceni. Postoji rezultat koji se zove Beri-Esenova teorema, ali uprkos mnogim poboljšanjima, još uvek nije mnogo koristan u praksi.

Danas se Centralna granična teorema prvenstveno koristi kao teorijsko sredstvo, a ne praktičan metod ocene verovatnoće. Postoje mnogo bolji načini koristeći Monte Karlo metode za dobijanje ocene verovatnoće povezane sa zbirovima. U gornjem primeru, jednostavna Monte Karlo ocena tačnog odgovora je 0.01364 ± 0.00004, tako da normalna aproksimacija ovde i nije tako loša. Ali za složenije probleme, CGT može dati približne vrednosti, koje se razlikuju u redu veličine, tako da je zaista treba koristiti samo kao poslednje moguće sredstvo.

Ponekad se normalna raspodela pojavljuje u stvarnim podacima, ali je prilično retka. Izvan veoma jednostavnih problema, većina skupova podataka ne liči na normalnu raspodelu, a preterano oslanjanje na njihovu upotrebu može biti ozbiljan problem u nekim disciplinama. Primer za to dolazi iz matematičkih finansija, gde se smatra da je prekomerna upotreba modeliranja korišćenjem Gausovih modela pomogla da se doprinese finansijskoj krizi 2008. godine.

19.3 *Korišćenje CGT za diskretne slučajne promenljive*

Kao teorema, CGT se podjednako dobro primenjuje na diskretne i neprekidne slučajne promenljive.

Primer 46
Neka $D_1, \ldots, D_{20}$ imaju gustinu

$$f_D(i) = 0.7\mathbb{1}(i = -1) + 0.3\mathbb{1}(i = 1).$$

Oceniti $\mathbb{P}(D_1 + \cdots + D_{20} \geq 0)$ koristeći CGT.

Rešenje Ovde je očekivanje

$$\mathbb{E}[D] = 0.7(-1) + 0.3(1) = -0.4$$

a drugi momenat

$$\mathbb{E}[D^2] = 0.7(-1)^2 + 0.3(1)^2 = 1,$$

tako da je $\mathrm{SD}(D) = \sqrt{1 - (-0.4)^2} = \sqrt{0.84}$. Dakle

$$\mathbb{P}(D_1 + \cdots + D_{20} \geq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{D_1 + \cdots + D_{20} - 20(-0.4)}{\sqrt{20}\sqrt{0.84}} \geq \frac{(0.4)(20)}{\sqrt{20 \cdot 0.84}}\right).$$

Verovatnoća da je standardna normalna barem $0.4\sqrt{20/0.84}$ može biti izračunata sa `1 - pnorm(0.4 * sqrt(20 / 0.8))`, što daje $\boxed{0.02275\ldots}$.

Ako za problem gore trebamo egzaktno rešenje, uzmimo N da bude broj puta kada je $D_i = 1$. Onda je broj puta kada je $D_i = -1$ jednak $20 - N$. Dakle

$$D_1 + \cdots + D_{20} = N(1) + (20 - N)(-1)$$

i ovo je barem 0 kada je $2N - 20 \geq 0$ ili $N \geq 10$. Stoga je ovo šansa da binomna slučajna promenljiva sa parametrima 20 i 0.3 bude najmanje 10, i `1 - pbinom(9, 20, 0.3)` vraća vrednost oko 0.04796.

Razmotrite sledeći primer:

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0.3, \mathbb{P}(X = 2) = 0.2, \mathbb{P}(X = 5) = 0.5.$$

Da li se CGT može koristiti za ocenu verovatnoće da je zbir 10 iid kopija ovih slučajnih promenljivih najmanje 25?

Prvo nađemo očekivanje

$$0.3(1) + 0.2(2) + 0.5(3) = 2.2,$$

i standardnu devijaciju

$$\mathrm{sqrt}(0.3(1)^2 + 0.2(2)^2 + 0.5(3)^2 - 2.2^2) = \mathrm{sqrt}(0.76).$$

Osnovna CGT ocena bila bi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_{10} \geq 25\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{10} - 10(2.2)}{\mathrm{sqrt}(10 \cdot 5.6)} \geq \frac{25 - 10(2.2)}{\mathrm{sqrt}(10 \cdot 0.76)}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{25 - 10(2.2)}{\mathrm{sqrt}(10 \cdot 5.6)} \geq \frac{25 - 10(2.2)}{\mathrm{sqrt}(10 \cdot 0.76)}\right) \approx \boxed{0.1382}.\end{aligned}$$

Nije sjajno, pošto je pravi odgovor oko 0.186. Ali, postoji način da se uradi mnogo bolje! Rezultat sabiranja gomile celih brojeva će sam po sebi biti ceo broj. I uopšteno govoreći, površina ispod normalne intervala $[24.5, 25.5]$ će biti bolja u oceni verovatnoće da je slučajna promenljiva 25, nego da uzmemo interval $[25, 26]$. Ovo dovodi do upotrebe *ispravke polucelog broja*.

Definicija 56
Za slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$, **ispravka polucelog broja** za CGT je sledeće. Za bilo koji ceo broj a,

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq a) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq a + 1/2),$$

i

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq a) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq a - 1/2),$$

Primena ovoga na naš primer daje:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_{10} \geq 25\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_{10} \geq 24.5\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{10} - 10(2.2)}{\mathrm{sqrt}(10 \cdot 5.6)} \geq \frac{24.5 - 10(2.2)}{\mathrm{sqrt}(10 \cdot 0.76)}\right)\\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{24.5 - 10(2.2)}{\mathrm{sqrt}(10 \cdot 5.6)} \geq \frac{24.5 - 10(2.2)}{\mathrm{sqrt}(10 \cdot 0.76)}\right) \approx \boxed{0.1822}.\end{aligned}$$

što je mnogo bliže pravom odgovoru.

Zadaci

19.1 Neka su $D_1, \ldots, D_8$ iid bacanja poštene šestostrane kockice. Aproksimirati verovatnoću da je $\sum D_i \geq 30$ koristeći CGT.

19.2 Neka su $A_1, \ldots, A_{10}$ iid $\mathsf{Exp}(2)$. Aproksimirati $\mathbb{P}(A_1 + \cdots + A_{10} \geq 7)$ koristeći CGT.

19.3 Pretpostavimo da R ima gustinu

$$f_R(r) = 2r \cdot \mathbb{1}(r \in [0, 1]).$$

a) Koje je očekivanje za R?

b) Koja je varijansa za R?

c) Neka si $R_1, R_2, \ldots$ nezavisne sl. prom. sa istom raspodelom kao R. Koristeći CGT, aproksimirati

$$\mathbb{P}(R_1 + \cdots + R_{100} \geq 70)?$$

d) Koje je očekivane za R dato da je $R \in [0.3, 0.5]$?

19.4 Uzmimo da X ima gustinu

$$f_X(x) = (3/4)x(2 - x)\mathbb{1}(x \in [0, 1]).$$

a) Naći $\mathbb{E}[X]$.

b) Naći $\mathrm{SD}(X)$.

c) Za $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$, aproksimirati sa CGT verovatnoću $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{20} \geq 13.4)$.

19.5 Neka su $U_1, U_2, \ldots, U_{12}$ standardne uniformne slučajne promenljive (znači uniformne nad $[0, 1]$). Koristeći CGT aproksimirati

$$\mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_{12} < 7).$$

19.6 Neka su $R_1, R_2, \ldots, R_{30}$ uniformne nad $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Koristeći CGT aproksimirati $\mathbb{P}(R_1 + \cdots + R_{30} < 100)$.

Glava 20

Bernulijev proces

Pitanje dana Neka su $B_1, \ldots, B_{25}$ identični, nezavisni pokušaji koji daju 0 ili 1, sa verovatnoćom $\mathbb{P}(B_i = 1) = 0.6$. Neka je $S = B_1 + \cdots B_{20}$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(S = 16)$?

Sažetak

Bernulijeva slučajna promenljiva je ili 1 (sa verovatnoćom p) ili 0 (sa verovatnoćom $1-p$). Pisaćemo $X \sim \mathsf{Bern}(p)$. Ona predstavlja broj uspeha jednog eksperimenta, koji može rezultirati ili uspehom ili neuspehom.

Bernulijev proces je niz slučajnih promenljivih $B_1, B_2, \ldots$ koje su iid $\mathsf{Bern}(p)$. Iz Bernulijevog procesa možemo stvoriti **binomne**, **geometrijske**, i **negativno binomske slučajne promenljive**. Ako imamo n pokušaja, onda možemo gledati na broj uspeha kao na sumu n nezaisnih Bernulijevih slučajnih promenljivih. Nazvaćemo ovu raspodelu **Binomnom**, i pisati $X = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathsf{Bin}(n, p)$. Za $X \sim \mathsf{Bin}(n, p)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbb{1}(k \in \{0, 1, \ldots, n\}).$$

20.1 Bernulijeva raspodela

Pretpostavimo da imam eksperiment koji ima dva ishoda, ili uspeh ili neuspeh. Zapisujemo uspehe koristeći 1 i neuspehe koristeći 0. Zatim se kaže da jedan eksperiment, jedna 1 ili 0 slučajna promenljiva ima *Bernoulijevu raspodelu*

Definicija 57
Kažemo da X ima **Bernulijevu raspodelu** sa parametrom p, i pišemo $X \sim \mathsf{Bern}(p)$ ako

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Napomena Bernulijeve slučajne promenljive se, takođe, nazivaju *indikatorske slučajne promenljive*, pošto ako je $X = \mathbb{1}(Y \in A)$ za bilo koju slučajnu promenljivu Y, X će takođe biti 0 ili 1, i stoga će imati Bernulijevu raspodelu sa $p = \mathbb{P}(Y \in A)$.

Činjenica 65
Očekivanje Bernulijeve slučajne promenljive je p, a varijansa jednaka $p(1-p)$.

Dokaz. Za $B \sim \mathsf{Bern}(p)$, očekivanje je $p(1)+(1-p)(0)=p$, dok je varijansa

$$\mathbb{E}[B^2]-\mathbb{E}[B]^2 = p(1)^1+(1-p)(0)^2-p^2 = p-p^2 = p(1-p).$$

□

Uopšteno govoreći, svaka kolekcija slučajnih promenljivih naziva se a *slučajni(stohastički) proces*. Za prvi slučajni proces koji ćemo proučavati, sve promenljive imaju Bernulijevu raspodelu.

Definicija 58
Ako su $B_1, B_2, \ldots \sim \mathsf{Bern}(p)$ iid, zvaćemo $\{B_i\}$ **Bernulijev proces**.

Već smo videli jednu raspodelu zasnovanu na Bernulijevom procesu, binomnu raspodelu.

Činjenica 66
Neka je $B_1, B_2, \ldots$ Bernulijev proces sa parametrom p i neka je n pozitivni ceo broj. Tada

$$S_n = B_1 + \cdots + B_n \sim \mathsf{Bin}(n, p).$$

U pitanju dana, svaki $B_i \sim \mathsf{Bern}(0.6)$, i $n=20$. Dakle $S \sim \mathsf{Bin}(20, 0.6)$, što znači

$$\mathbb{P}(S=16) = \binom{20}{16} 0.6^{16} 0.4^4 \approx \boxed{0.03499}.$$

Pošto su Bernulijeve slučajne promenljive nezavisne, srednja vrednost i varijansa slučajnih promenljivih se sabiraju. Ovo odmah daje sledeći rezultat.

Činjenica 67
Neka je $B \sim \mathsf{Bin}(n,p)$. Onda $\mathbb{E}[B]=np$, $\mathbb{V}(B)=np(1-p)$.

20.2 Geometrijska raspodela

Bernulijev proces je niz nula i jedinica. Tipičan ishod može izgledati ovako

$$(B_1, B_2, \ldots) = 000010000000110011100110011010111000010010010001\cdots$$

Pogledajmo poziciju u nizu gde vidimo 1. Imamo 1 na poziciji 5, poziciji 13, poziciji 14, i tako dalje. Najmanja numerisana pozicija koja je 1 može se napisati pomoću infimuma:

$$G = \inf\{i : B_i = 1\}.$$

Kao što je ranije rečeno u tekstu, ovu slučajnu promenljivu nazivamo *geometrijska* sa parametrom p i pišemo $G \sim \mathsf{Geo}(p)$.

Primer 47
U pitanju dana, za $G = \inf\{i : B_i = 1\}$, koliko je $\mathbb{P}(G = 4)$?

Odgovor Da bi bilo $G = 4$, niz mora početi sa 0001. Svaka 0 ima verovatnoću $1 - p$ da se dogodi, a poslednja 1 ima verovatnoću p. U pitanju dana $p = 0.6$, tako da je odgovor

$$(0.4^3)(0.6) = \boxed{0.03840}.$$

Činjenica 68 (Geometrijska gustina)
Geometrijska slučajna promenljiva sa parametrom p ima verovatnoću $(1-p)^{i-1}p$ da bude jednaka i za bilo koji pozitivan ceo broj i.

Napomena Postoje dve uobičajene definicije za geometrijsku slučajnu promenljivu u praksi. Jedna je ona što je ovde data, a u drugoj se samo računaju 0 *pre* prve jedinice, što je ekvivalentno $G - 1$. Kada vidite geometrijske slučajne promenljive obavezno proverite koja je definicija u upotrebi!

Primetimo da je Bernulijev proces *bez memorije*. Ovo dovodi do sledeće činjenice o geometrijskim slučajnim promenljivim.

Činjenica 69
Za $G \sim \text{Geo}(p)$, i $a \in \{1, 2, \ldots\}$

$$[G|G > a] \sim a + G.$$

Rečju, ako čekamo a pokušaja a da ne vidimo 1, broj pokušaja koji nam je potreban do sledećeg 1 takođe će biti geometrijska slučajna promenljiva.

Dokaz. Ovo se pokazuje proverom da su gustine iste. Neka su a i i pozitivni celi brojevi. Onda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G = i|G > a) &= \frac{\mathbb{P}(G = i, G > a)}{G > a} \\ &= p(1-p)^{i-1}\mathbb{1}(i > a)/(1-p)^a \\ &= p(1-p)^{i-a-1}\mathbb{1}(i - a > 0).\end{aligned}$$

Slično tome,

$$\mathbb{P}(a + G = i) = \mathbb{P}(G = i - a) = p(1-p)^{i-a-1}\mathbb{1}(i - a > 0).$$

Pošto su gustine iste, raspodele slučajnih promenljivih su iste. $\square$

Konkretno,

$$[G|B_1 = 0] \sim [G|G > 1] \sim 1 + G.$$

Ranije smo ovo koristili sa Osnovnom teoremom verovatnoće da pokažemo da je $\mathbb{E}[G] = 1/p$.

Primer 48
Poštena 6-ostrana kockica se baca dok se ne pojavi broj 4. Koji je potreban prosečan broj bacanja kockice?

Odgovor Broj bacanja će biti geometrijski raspodeljen sa parametrom $1/6$. To je zato što je to šansa za uspeh, što je u ovom slučaju kada se pojavi 4. Otuda je očekivani broj bacanja

$$\frac{1}{1/6} = \boxed{6}.$$

Sada za varijansu geometrijske slučajne promenljive.

Činjenica 70
Za $G \sim \text{Geo}(p)$, $\mathbb{V}(G) = (1-p)/p^2$.

Dokaz. Po osnovnoj teoremi verovatnoće

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[G^2|B_1]] \\
&= \mathbb{P}(B_1 = 1)\mathbb{E}[G^2|B_1 = 1] + \mathbb{P}(B_1 = 0)\mathbb{E}[G^2|B_1 = 0) \\
&= p\mathbb{E}[G^2|B_1 = 1] + (1-p)\mathbb{E}[G^2|B_1 = 0] \\
&= p + (1-p)\mathbb{E}[(1+G)^2] \\
&= p + (1-p)\mathbb{E}[1 + 2G + G^2] \\
&= p + (1-p) + 2(1-p)/p + (1-p)\mathbb{E}[G^2].
\end{aligned}$$

Prenesimo $(1-p)\mathbb{E}[G^2]$ na drugu stranu da dobijemo

$$\begin{aligned}
p\mathbb{E}[G^2] &= p + (1-p) + 2(1-p)/p \\
\mathbb{E}[G^2] &= 1 + (1-p)/p + 2(1-p)/p^2.
\end{aligned}$$

Dakle varijansa je

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(G) &= \mathbb{E}[G^2] - \mathbb{E}[G]^2 \\
&= 1 + (1-p)/p + 2(1-p)/p^2 - 1/p^2 \\
&= (p^2 + p - p^2 + 2(1-p) - 1)/p^2 = (p + 1 - 2p)/p^2 = (1-p)/p^2.
\end{aligned}$$

□

20.3 Negativna binomna raspodela

Geometrijska slučajna promenljiva sa parametrom p je prvi put kada se 1 pojavljuje u Bernulijevom procesu sa parametrom p. *Negativna binomna* sl. prom. sa parametrima k i p je k-ti put kada se 1 pojavljuje u Bernulijevom procesu sa parametrom p.

Definicija 59
Kažemo da N ima **Negativnu binomnu** raspodelu sa parametrima k i p i pišemo $N \sim \text{NegBin}(k, p)$ ako

$$N = \inf\{i : B_1 + \cdots + B_i = k\}.$$

U binomnoj raspodeli, broj pokušaja je fiksiran parametrom n i slučajna promenljiva je broj jedinica koji se pojavljuju u prvih n izvlačenja. U negativnoj binomnoj raspodeli, broj jedinica je fiksan, a slučajna promenljiva je broj pokušaja potrebnih da bi se dobilo k različitih jedinica.

Činjenica 71
Ako je $N \sim \text{NegBin}(k, p)$, onda

$$\mathbb{P}(N = i) = \binom{i-1}{k-1}(1-p)^{i-k}p^k$$

Dokaz. Ako je $N = i$ onda $B_i = 1$ i ima $k - 1$ različitih jedinica koje se pojavljuju u $B_1, \ldots, B_{i-1}$. Ima $\binom{i-1}{k-1}$ načina da se izabere gde se jedinice pojavljuju. Svaki takav niz sadrži k različitih jedinica i $i - k$ različitih nula, čime dobijamo verovatnoću od $(1-p)^{i-k}p^k$. □

Razmotrimo $N \sim \text{NegBin}(2, p)$. Prva jedinica se pojavljuje na poziciji G_1 gde $G_1 \sim \text{Geo}(p)$. Onda kao da proces počinje ispočetka, i moramo da čekamo geometrijski broj puta da se pojavi sledeća jedinica.

Činjenica 72
Neka su $G_1, G_2, \ldots, G_k$ iid $\text{Geo}(p)$. Onda

$$G_1 + \cdots + G_k \sim \text{NegBin}(k, p).$$

Ovo odmah daje srednju vrednost i varijansu negativne binomne.

Činjenica 73
Za $N \sim \text{NegBin}(k, p)$, $\mathbb{E}[N] = k/p$, $\mathbb{V}(N) = k(1-p)/p^2$.

20.4 Iz perspektive tačaka

Umesto da pratimo Bernulijeve slučajne promenljive, možemo samo da pratimo *tačke* gde su Bernulijeve jednake 1.

Definicija 60
Za Bernulijev proces $\{B_i\}$, neka je $P = \{i : B_i = 1\}$ nazvan **Bernulijev tačkasti proces** i čije elemente zovemo **tačkama**.

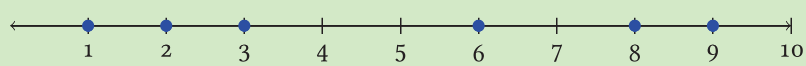
Primer 49
Ako Bernulijev proces počinje sa

$$1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0,$$

Prvih par tačaka su

$$P = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}.$$

Njihov grafik izgleda ovako



Ovaj tačkasti proces ima neke osobine.

Činjenica 74
Bernulijev tačkasti proces sa parametrom p zadovoljava sledeće.

1. Ako su A i B disjunktni podskupovi od $\{1, 2, 3, \dots\}$, onda su

$$\#(P \cap A) \text{ and } \#(P \cap B)$$

   nezavisne slučajne promenljive.

2. Za sve $A \subseteq \{1, 2, \dots\}$,

$$\mathbb{E}[\#(P \cap A)] = p \cdot \#(A).$$

Primetimo da možemo preinačiti naše raspodele u smislu ovih tačaka.

Činjenica 75
Razmotrimo Bernulijev tačkasti proces $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ sa parametrom p, gde je $P_1 < P_2 < P_3 < \dots$.

$$\begin{aligned} P_1 &\sim \mathsf{Geo}(p) \\ \forall r \geq 1, P_{r+1} - P_r &\sim \mathsf{Geo}(p) \\ P_r &\sim \mathsf{NegBin}(r, p) \\ \#(P \cap A) &\sim \mathsf{Bin}(\#(A), p) \end{aligned}$$

Ovo proizilazi direktno iz činjenice da su B_i iid $\mathsf{Bern}(p)$ slučajne promenljive.

Zadaci

20.1 Neka je $X \sim \mathsf{Bin}(34, 0.23)$. Koliko je $\mathbb{E}[X]$?

20.2 Neka je $W \sim \mathsf{Bin}(10, 0.2)$ i $Y \sim \mathsf{Bin}(10, 0.3)$. Koliko je $\mathbb{E}[W + Y]$?

20.3 Neka je $G \sim \mathsf{Geo}(0.38)$.

a) Koliko je $\mathbb{E}[G]$?

b) Kolika je $\mathbb{V}[G]$?

20.4 Pretpostavimo da bacamo poštenu 6-ostranu kockicu sve dok ne dobijemo 5. Neka je T broj neophodnih bacanja. Koliko je $\mathbb{E}[T]$?

20.5 Neka je $N \sim \mathsf{NegBin}(20, 0.38)$.

a) Koliko je $\mathbb{E}[N]$?

b) Kolika je $\mathbb{V}[N]$?

20.6 Neka je B_i Bernulijev proces sa parametrom 0.4. Kolika je verovatnoća da je $B_1 + \cdots + B_5 = 4$?

20.7 Neka su $X \sim \mathsf{Bin}(13, 0.2)$ i $Y \sim \mathsf{Bin}(27, 0.2)$ nezavisne. Koja je raspodela od $X + Y$?

20.8 Neka je B_i Bernulijev proces sa parametrom 0.2.

a) Naći $\mathbb{P}(\inf\{i : B_i = 1\} = 4)$.

b) Naći $\mathbb{P}(\inf\{i : B_i = 0\} = 4)$.

20.9 Neka je Y slučajna promenljiva sa vrednostima u pozitivnim celim brojevima i sa $\mathbb{E}[Y] = 4.2$, i $[X|Y] = \mathsf{Bin}(Y, 0.3)$. Koliko je onda $\mathbb{E}[X]$?

20.10 Naći funkciju generatrisu momenta geometrijske slučajne promenljive sa parametrom p.

20.11 Naći $\mathbb{E}[G^2]$ za geometrijsku sl. prom. uslovljavajući vrednošću B_1 i onda uzimajući očekivanje ponovo.

Glava 21

Jednodimenzioni Puasonov tačkasti proces

Pitanje dana Pretpostavimo da daska dužine 2 metra ima defekte modelovane kao Puasonov tačkasti proces intenziteta $\lambda = 0.3/\text{metru}$. Kolika je verovatnoća da postoje dva ili više nedostataka na toj dasci?

Sažetak
Konstruisati skup P koji je **Puasonov tačkasti proces P intenziteta λ na** $[0, \infty)$ na sledeći način. Neka je $A_1, A_2, \ldots$ iid niz eksponencijalnih slučajnih promenljivih sa parametrom λ. Zatim postavimo

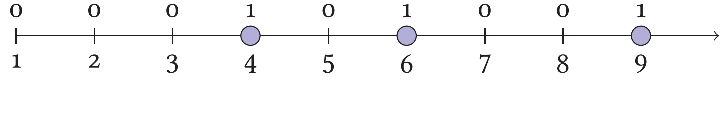
$$\begin{aligned} P_1 &= A_1 \\ P_2 &= A_1 + A_2 \\ P_3 &= A_1 + A_2 + A_3 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Onda postavimo $P = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.
Ovo znači da P_i ima **gama** raspodelu sa parametrima i i λ. Pišemo $G \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ ako G ima gustinu

$$f_G(s) = \lambda^r s^{r-1} \exp(-\lambda s) \mathbb{1}(s \geq 0) / \Gamma(r).$$

Ovde je $\Gamma(r)$ gama funkcija koja je jednaka $(r-1)!$ kada je r ceo broj, a u suprotnom $\int_0^\infty x^{r-1} \exp(-x)\, dx$.

Bernulijev proces $B_1, B_2, B_3, \ldots$ gde je $B_i \sim \text{Bern}(p)$ je povezan sa Bernulijevim tačkastim procesom gde je $P = \{i : B_i = 1\}$.



Očekivani broj tačaka koji upadaju u skup A je samo broj tačaka u A puta p. Pošto su B_i nezavisni, za $A \cap B = \emptyset$, broj tačaka koji upadaju u A i broja tačaka koji upadaju u B su nezavisni jedno od drugog. To jest,

1. Za A, B disjunktne podskupove od $\{1, 2, \ldots\}$, $\#(P \cap A)$ i $\#(P \cap B)$ su nezavisne slučajne promenljive.

2. Za A podskup od $\{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{E}[\#(P \cap A)] = p \cdot \#(A)$.

Ovde su tačke ograničene tako da leže na celim brojevima $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Razmislite o tome da tačke budu bilo gde u $[0, \infty)$.

Možemo da izgradimo takav tačkasti proces preko $[0, \infty)$ promenom mere u Osobini 2 sa mere brojanja na Lebegovu meru.

Definicija 61
Kažemo da je P **Puasonov tačkasti proces intenziteta λ na** $[0, \infty)$ ako

1. Za A i B disjunktne merljive podskupove od $[0, \infty)$, $\#(P \cap A)$ and $\#(P \cap B)$ su nezavisne slučajne promenljive.

2. Za A merljivi podksup od $[0, \infty)$, $\mathbb{E}[\#(P \cap A)] = \lambda \cdot \ell(A)$, gde je ℓ Lebegova mera.

Prisetimo se da je za Bernulijev tačkasti proces $P = \{P_1, P_2, \ldots\}$ where $P_1 < P_2 < \cdots$,

$$\begin{aligned} P_1 &\sim \mathsf{Geo}(p) \\ \forall r \geq 1, P_{r+1} - P_r &\sim \mathsf{Geo}(p) \\ P_r &\sim \mathsf{NegBin}(r, p) \\ \#(P \cap A) &\sim \mathsf{Bin}(\#(A), p). \end{aligned}$$

Slično tome, raspodela prve tačke, raspodela razlike između uzastopnih tačaka, raspodela r-te tačke i raspodela broja tačaka u datom intervalu mogu se, takođe, opisati i za Puasonov tačkasti proces.

Činjenica 76
Za Puasonov tačkasti proces $P = \{T_1, T_2, \ldots\}$ intenziteta λ na $[0, \infty)$, gde je $T_1 < T_2 < \cdots$,

$$\begin{aligned} T_1 &\sim \mathsf{Exp}(\lambda) \\ \forall r \geq 1, T_{r+1} - T_r &\sim \mathsf{Exp}(\lambda) \\ T_r &\sim \mathsf{Gamma}(r, \lambda) \\ \#(P \cap A) &\sim \mathsf{Pois}(\ell(A) \cdot \lambda). \end{aligned}$$

Ovde je $\mathsf{Pois}(\mu)$ Puasonova raspodela sa očekivanjem μ. Definiše se na sledeći način.

Definicija 62
Kažemo da $X \sim \mathsf{Pois}(\mu)$ ako ima gustinu

$$f_X(i) = \exp(-\mu)\frac{\mu^i}{i!}\mathbb{1}\{i \in \{0, 1, 2 \ldots\}\}.$$

Dakle, eksponencijalna raspodela je neprekidni analog geometrijske raspodele, gama je neprekidni analog negativnog binoma, a Puasonova broji tačke u neprekidnom prostoru, tamo gde binomna broji tačke u diskretnom prostoru.

Da bismo razumeli zašto Puasonova raspodela ima oblik kakav ima, pomaže da se razmotri pitanje dana i ono što je poznato kao eksponencijalni prostor.

21.1 Eksponencijalni prostor i Puasonova raspodela

Neka $A = [0, 2]$ predstavlja dužinu daske iz pitanja dana. Tada, ako je P Puasonov tačkasti proces intenziteta 0.3 na $[0, \infty)$, onda su $P \cap [0, 2]$ tačke koje upadaju dužinom daske. Koristeći našu činjenicu,

$$\#(P \cap A) \sim \text{Pois}(0.3 \cdot 2).$$

Zašto ovo važi?

Pa, $P \cap A$ može sadržati nijednu tačku, ili 1 tačku, ili 2 tačke, i tako dalje. Prostor bez tačaka je $\emptyset$. Prostor sa jednom tačkom je $\binom{[0,2]}{1}$. Prostor sa dve tačke je $\binom{[0,2]}{2}$, i tako dalje. Stoga je skup tačaka P podskup od

$$\emptyset \cup \binom{[0, 2]}{1} \cup \binom{[0, 2]}{2} \cup \binom{[0, 2]}{3} \cup \cdots,$$

koji je poznat kao *eksponencijalni prostor*.

Podsetimo se da notacija poput $\binom{[0,2]}{i}$ označava skup svih podskupova od $[0, 2]$ veličine i. Koja je mera $\binom{[0,2]}{i}$? Pa, mera jedne tačke iz $[0, 2]$ je 2. Mera $[0, 2]^2$ je 2^2, a generalno mera $[0, 2]^i$ je 2^i.

Međutim, to je mera i-torki gde je redosled tačaka bitan. Da biste dobili meru *podskupova* kod kojih redosled nije bitan, podelite sa brojem načina za redosled tačaka. Ovo je $i!$. Na primer, vektori $(0.3, 1.3)$ i $(1.3, 0.3)$ se preslikavaju na podskup $\{0.3, 1.3\}$. Ako imam podskup veličine i, postoje $i!$ vektora koji se preslikavaju u podskup. Dakle, merimo samo podskupove veličine i i to ima meru

$$\text{mera}\left(\binom{[0, 2]}{i}\right) = \frac{2^i}{i!}$$

Gde tu sad ulazi intenzitet? Pa, jedan od načina da vidimo intenzitet λ je da on daje bonus faktor za više tačaka u skupu. Sa dva poena dobijamo faktor bonusa od λ^2, sa sedam poena λ^7 i tako dalje.

Dakle, ako imamo tri tačke, oni dobijaju faktor bonusa od λ^3, a pošto ima $2^3/3!$, one ukupno doprinose

$$\frac{(2\lambda)^3}{3!}$$

i odatle mera. Kada ovo saberemo za 0, 1, 2 ili bilo koji nenegativan ceo broj tačaka, dobijamo

$$1 + \frac{(2\lambda)}{1!} + \frac{(2\lambda)^2}{2!} + \frac{(2\lambda)^3}{3!} + \cdots.$$

Izgleda poznato? Ovo je upravo razvoj $\exp(2\lambda)$ u Tejlorov red. Dakle, da se normalizuje ovaj izraz tako da se sve zbroji na 1, množimo sa $\exp(-2\lambda)$.

To znači da je verovatnoća da se nalazimo u delu prostora koji ima tri tačke $\exp(-2\lambda)(2\lambda)^3/3!$. Verovatnoća da se nalazimo u delu prostora sa četiri tačke je $\exp(-2\lambda)(2\lambda)^4/4!$. I tako dalje. Ako dozvolimo da N označava broj tačaka u procesu, onda upravo zato imamo raspodelu Puasona. Za $N \sim \text{Pois}(2\lambda)$,

$$\mathbb{P}(N = i) = \exp(-2\lambda)\frac{(2\lambda)^i}{i!}\mathbb{1}(i \in \{0, 1, 2, \ldots\}).$$

Primetimo da broj 2 u pitanju dana dolazi od činjenice da je Lebegova mera skupa $[0,2]$ jednaka 2. Sa našom notacijom $\ell([0,2]) = 2$, dakle $\lambda \cdot \ell([0,2]) = (0.3)(2) = 0.6$, so $\mathbb{P}(N \geq 2)$ is

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(N \leq 1)\\ &= 1 - \mathbb{P}(N = 1) - \mathbb{P}(N = 0)\\ &= 1 - \exp(-0.6)[(0.6)^0/0! + (0.6)^1/1!] \approx \boxed{0.1219\ldots}.\end{aligned}$$

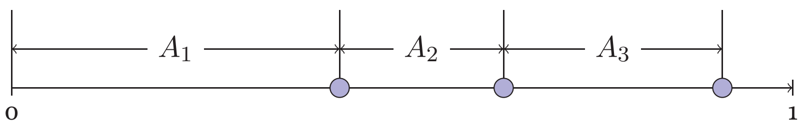
Dakle, broj tačaka u $P \cap A$ ima Puasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda \cdot \ell(A)$. Pošto je srednji broj tačaka takođe $\lambda \cdot \ell(A)$, to znači da je parametar Puasonove raspodele njeno sopstveno očekivanje.

Činjenica 77
Za $N \sim \mathsf{Pois}(\mu)$, $\mathbb{E}[N] = \mu$.

Puasonove slučajne promenljive isto imaju i lepo svojstvo da je varijansa takođe μ.

Činjenica 78
Za $N \sim \mathsf{Pois}(\mu)$, $\mathbb{V}(N) = \mu$.

Često se takvi procesi koriste za modeliranje vremena dolaska događaja, kao što je pristizanje kupaca. Stoga se tačke T_i procesa često nazivaju *vremena dolaska*. Vremena između dolazaka, $P_i - P_{i-1}$ su često se nazivaju *vremena imeđu dolazaka*.



Kako znamo da vreme prvog dolaska ima distribuciju $\mathsf{Exp}(\lambda)$? Pa, uzmimo

$$\mathbb{P}(T_1 > a) = \mathbb{P}(\#(P \cap [0,a]) = 0) = \exp(-\lambda a).$$

To je samo funkcija preživljavanja eksponencijalne slučajne promenljive sa stopom λ.

Preostala vremena između dolazaka nalaze se na sličan način.

21.2 Gama raspodela

Sada razmotrite vreme dolaska r, T_r. Neka je $s > 0$. Šta se mora dogoditi za T_r da padne u mali diferencijalni interval oko s širine ds? To jest, šta je $\mathbb{P}(T_r \in ds)$?

Dve stvari se moraju desiti da bi bilo $T_r \in ds$.

1. Mora da postoji tačka u diferencijalnom intervalu oko s.

2. U intervalu $[0,s]$ mora biti $r - 1$ tačaka.

3. Ostatak prostora mora biti prazan.

Evo intuicije. Pod tim mislimo da je to razlog zašto je to tačno, ali se ne bi smatralo rigoroznim dokazom! Za Puasonov tačkasti proces, mali diferencijalni element oko s sadrži ili 0 tačaka ili 1 tačku. Dakle, to je Bernuli, a znamo da je srednja vrednost $\lambda\, ds$ pošto je ds mera diferencijalnog intervala.

Dobro, kolika je sada šansa da interval $[0, s]$ sadrži $r-1$ tačaka! To ima Puasonovu raspodelu sa parametrom λs, dakle

$$\exp(-\lambda s)\frac{(\lambda s)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Množenje sa $\lambda\, ds$ za verovatnoću da postoji r-ta tačka blizu s daje

$$\mathbb{P}(T_r \in ds) = \frac{\lambda^r \exp(-\lambda s) s^{r-1}}{(r-1)!}$$

Ovo inspiriše definiciju *gama raspodele*.

Definicija 63
Kažemo da X ima **gama raspodelu** sa parametrima α i λ ako ima gustinu

$$f_X(s) = \frac{\lambda^\alpha \exp(-\lambda s) s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}(s \geq 0),$$

gde je

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \exp(-s) s^{\alpha-1}\, ds$$

i zove se **Gama funkcija** i normalizuje gustinu.

Činjenica 79
Kada je k pozitivan ceo broj, $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Činjenica 80
Za $P_1 < P_2 < \cdots$ sortirani Puasonov tačkasti proces intenziteta λ, $P_i \sim \text{Gamma}(i, \lambda)$.

Napomene

- Gama raspodelu smo motivisali razmatranjem α da je pozitivan ceo broj, ali je gama raspodela definisana za bilo koje $\alpha \geq -1$.
- Za k pozitivan ceo broj, raspodela $\text{Gamma}(k, \lambda)$ je takođe poznata kao **Erlangova raspodela** po danskom matematičaru Agneru Erlangu koji je postavio veliki deo teorije redova čekanja.

Primer 50
Pretpostavimo da je $P_1 < P_2 < \cdots$ sortiran Puasonov tačkasti proces intenziteta $2,5$. Kolika je šansa da je $P_3 \in [1, 2]$?

Rešenje Znamo da je $P_3 \sim \text{Gamma}(3, 2.5)$, tako da

$$\mathbb{P}(P_3 \in [1,2]) = \int_{s=1}^2 \frac{(2.5)^3 s^2 \exp(-2.5s)}{2!}\, ds \approx \boxed{0.4191}.$$

Zadaci

21.1 Neka je P Puasonov tačkasti proces intenziteta 2, na intervalu $[0, \infty)$. Koja je raspodela $\inf(P)$?

21.2 Za P koji je PPP na $[0, \infty)$ intenziteta 3.2, koja je očekivana vrednost od $\inf(P)$?

21.3 Nek aje P Puasonov tačkasti proces na $[0, \infty)$ intenziteta 1.8, i $P_1 = \inf(P)$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(P_1 \leq 1)$?

21.4 Neka je $T_1, T_2, \ldots$ iid niz $\mathsf{Exp}(2)$ slučajne promenljive. Neka je

$$N = \sup\{n : T_1 + \cdots + T_n \leq 4.1\}.$$

Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(N = 8)$?

21.5 Vremena dolazaka autobusa tokom jednog sata ($[0, 1]$) formiraju Puasonov proces intenziteta $1.4/\text{hr}$.

a) Kolika je šansa da tačno jedan autobus stigne u sat vremena?
b) Koliki je očekivani broj autobusa koji stižu u sat vremena?
c) Koliki je očekivani broj autobusa koji stižu u prvih pola sata?

21.6 Zahtevi za informacijama u Honold biblioteci tokom ispitne nedelje stižu prema Puasonovom procesu intenziteta 4.2 po satu.

a) Koliki je očekivani broj zahteva dobijen tokom smene od šest sati?
b) Kolika je šansa da treći zahtev stigne pre kraja prvog sata?
c) Kolika je kovarijansa između vremena trećeg zahteva i vremena četvrtog zahteva?
d) Svaki zahtev (nezavisno) ima 5% šanse da budu nerešiv. Kolika je verovatnoća da se pojavi bar jedan nerešiv zahtev u smeni od šest sati?

21.7 Za Puasonov tačkasti proces na $[0, \infty)$ intenziteta λ, neka je $N_A = \#(P \cap A)$. Naći $\text{Cov}(N_{[0,2)}, N_{[0,3)})$.

Glava 22

Puasonov tačkasti proces

Pitanje dana Udari groma u šumu koja pokriva 3 kvadratne milje se modeluju kao da se dešavaju intenzitetom 21.2 po kvadratnoj milji koristeći Puasonov tačkasti proces. Koliki je očekivani broj udara u celoj šumi?

Sažetak Kada su tačke u prostoru Ω tako da je broj tačaka u disjunktnim skupovima nezavisan, a srednji broj tačaka u skupu je dat merom skupa μ, tačke formiraju a **Puasonov tačkasti proces**. Pišemo $P \sim \mathsf{PPP}(\Omega, \mu)$.
Za A merljivi podskup od Ω,

$$N_A = \#(P \cap A) \sim \mathsf{Pois}(\mu(A)).$$

Jedna vrsta slučajnog procesa, koji još nismo razmatrali, je kada imamo *prostorne* podatke, koji se sastoje od skupa tačaka izabranog ravnomerno nasumično u nekom prostoru. Potreban nam je način da modelujemo takve podatke, na primer:

1. Lokacije izbijanja bolesti u zajednici.
2. Nedostaci u parčetu metalnog lima.
3. Ćelije raka u uzorku tkiva.

Da bismo rešili ovu i više opštih situacija, sada dajemo našu najopštiju definiciju Puasonovog tačkostog procesa u oblasti Ω zajedno sa merom μ.

Definicija 64
Kolekcija tačaka P u Ω je **Puasonov tačkasti proces mere intenziteta μ nad Ω** (pišemo $P \sim \mathsf{PPP}(\Omega, \mu)$ ako P zadovoljava dve osobine.

1. Za A i B disjunktne merljive podskupove od Ω, $\#(P \cap A)$ and $\#(P \cap B)$ su nezavisne slučajne promenljive.
2. Za A merljivi podskup od Ω, $\mathbb{E}[\#(P \cap A)] = \mu(A)$.

Razmotrite sledeće mere intenziteta.

1. Bernulijev tačkasti proces: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mu(A) = p \cdot \#(A)$.
2. Puasonov tačkasti proces intenziteta λ nad$[0, \infty)$: $\Omega = [0, \infty)$, $\mu(A) = \lambda \cdot \ell(A)$, gde je ℓ Lebegova mera.
3. U pitanju dana, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mu(A) = 21.2 \cdot \ell(A)$.

Imajte na umu da konačna vrednost $\mu(A)$ nema jedinice, pošto računa prosečan broj tačaka u regionu A.

Primer 51
Pitanje dana Udari groma u šumi koja pokriva 3 kvadratne milje dešavaju se intenzitetom 21.2 po kvadratnoj milji kao Puasonov tačkasti proces. Koji je očekivani broj udara u celoj šumi?

Rešenje Ukupno očekivanje je mera prostora (3 kvadratne milje) puta intenzitet (21.2 po kvadratnoj milji) tj. $\boxed{63.60}$.

Jednom kada znamo srednju vrednost broja tačaka u A, zapravo znamo celu raspodelu.

Činjenica 81
Za $P \sim \mathsf{PPP}(\Omega, \mu)$ i A merljiv podskup od Ω.

$$N_A = \#(P \cap A) \sim \mathsf{Pois}(\mu(A)).$$

22.1 Zbir nezavisnih Puasonovih slučajnih promenljivih

Jedna od lepih stvari u vezi Puasonovih slučajnih promenljivih je da, ako dodate dva nezavisna Puasona, rezultat je i dalje Puasonova slučajna promenljiva!

Činjenica 82
Neka su $N_1 \sim \mathsf{Pois}(\mu_1)$ i $N_2 \sim \mathsf{Pois}(\mu_2)$ nezavisni. Onda $N_1 + N_2 \sim \mathsf{Pois}(\mu_1 + \mu_2)$.

Dokaz. Pretpostavimo da imamo Puasonov tačkasti proces P_1 intenziteta 1 na $[0, \mu_1]$, i P_2 takođe PPP intenziteta 1 na $(\mu_1, \mu_1 + \mu_2]$. Primetimo da $\#(P_1) \sim \mathsf{Pois}(\mu_1)$ i $\#(P_2) \sim \mathsf{Pois}(\mu_2)$.

Neka je $P = P_1 \cup P_2$ kombinacija ova dva procesa. Rezultat je opet Puasonov tačkasti proces intenziteta 1 nad $[0, \mu_1 + \mu_2]$. Ima broj tačaka jednak $\#(P_1 + P_2) = \#(P_1) + \#(P_2)$. Tako da

$$\#(P_1) + \#(P_2) \sim \mathsf{Pois}(\mu_1 + \mu_2),$$

prema osobinama Puasonovih tačkastih procesa. □

Podsetimo se da ako su $Z_1 \sim \mathsf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Z_2 \sim \mathsf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne, onda je $Z_1 + Z_2$ takođe normalno raspodeljena slučajna promenljiva, sa srednjom vrednošću $\mu_1 + \mu_2$ i varijansom $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Dakle, i za normalne slučajne promenljive i za Poissonove slučajne varijable, dodavanje nezavisnih izvlačenja zajedno ostaje u istoj porodici raspodela sa odgovarajućim izborom parametara, da bi srednja vrednost i varijansa odgovarali.

Za nezavisne Poissonove slučajne promenljive sa srednjim vrednostima μ_1 i μ_2, srednja vrednost zbira mora biti $\mu_1 + \mu_2$, a varijansa je $\mu_1 + \mu_2$ jer su nezavisne. Ovo se lepo uklapa sa činjenicom da je zbir Puasonova slučajna promenljiva sa parametrom (a tako i srednjom vrednošću i varijansom) jednakim $\mu_1 + \mu_2$.

22.2 Proređivanje

Razmotrite sledeći problem.

Primer 52
Pretpostavimo da se dolasci u red dešavaju prema Puasonovom procesu po stopi od 3 po satu. Svaki dolazak nezavisno ima 40% šanse da će zahtevati dugu uslugu i 60% šanse da zahteva kratku uslugu. Kolika je šansa da postoje bar dva duga servisa u prvom satu?

Ovo je primer problema gde se koristi pojam *proređivanje*. Zapamtite da stopa 3 po satu ukazuje da smo u malom vremenskom intervalu dt, očekivali da ćemo imati $3\ dt$ dolazaka. Ali, pošto samo 40% tih dolazaka zahteva dug servisa, verovatnoća dolaska dugog servisa pada na $3(0.4)\ dt = 1.2\ dt$.

Drugim rečima, ako uzmemo u obzir samo one dolaske koji zahtevaju dugu uslugu, oni formiraju novi Poissonov proces po stopi od 1.2 po satu. Dakle, gornji primer ima odgovor jednak $\mathbb{P}(N \geq 2)$ gde $N \sim \text{Pois}((1.2)(1))$.

$$\mathbb{P}(N \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N = 0) - \mathbb{P}(N = 1) = 1 - \exp(-1.2) - \frac{1.2}{2}\exp(-1.2) = \boxed{0.5180\ldots}.$$

Definicija 65
Neka je P Puasonov tačkasti proces sa merom intenziteta $\mu(A)$. Neka $f : A \to [0,1]$ dodeljuje verovatnoću svakoj tački u A. Za $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ imajmo nezavine $B_1, \ldots, B_n \sim \text{Bern}(p)$. Ako je $P' = \{P_i : B_i = 1\}$, zovimo P' **proređeni Puasonov tačkasti procesa**.

Činjenica 83 (Proređivanje Puasonovog tačkastog procesa)
Ako proredimo Puasonov tačkasti proces mere intenziteta μ preko A koristeći istu verovatnoću p za zadržavanje svakog $a \in P$, onda je rezultat Puasonov tačkasti proces sa intenzitetom $p\mu$ nad A.

Dokaz. Neka je P' proređena verzija PPP-a P. Nezavisnost $\#(P' \cap A)$ i $\#(P' \cap B)$ za disjunktne A i B proizilazi iz nezavisnosti $\#(P \cap A)$ i $\#(P \cap B)$.

Neke je A merljiv skup. Onda

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\#(P' \cap A)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\#(P' \cap A) | \#(P \cap A)]] \\ &= \mathbb{E}[p\#(P \cap A)]] \\ &= p\mathbb{E}[\#(P \cap A)] = p\mu(A).\end{aligned}$$

□

22.3 Uslovljavanje brojem tačaka

Neka su A i B disjunktni skupovi. Pretpostavimo da znamo da je tačka Puasonovog tačkastog procesa ili u A ili B, to jest $a \in A \cup B$. Kolika je šansa da tačka pripada A? Nije iznenađujuće da je šansa da se nađe u A u odnosu na B jednaka meri intenziteta od A prema meri intenziteta od B.

Činjenica 84
Neka je a tačka PPP-a mere intenziteta μ nad $A \cup B$, gde su A i B disjunktni. Onda

$$\mathbb{P}(a \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(A) + \mu(B)}.$$

Primer 53
Vozovi stižu kao PPP sa intenzitetom 2 na sat. S obzirom da tačno jedan voz stigne u prva tri sata, kolika je šansa da stigne u prvom satu?

Rešenje Prvi sat ima meru $2(1-0) = 2$. Preostala dva sata imaju meru $2(3-1) = 4$. Dakle, šansa da voz stigne u prvom satu je

$$\frac{2}{2+4} = 1/3 = \boxed{0.3333\ldots}.$$

Štaviše, sve tačke PPP-a u neprekidnom prostoru su nezavisne jedna od druge.

Činjenica 85
Neka je $P = \{P_1, \ldots, P_N\}$ PPP nad A. Onda su $P_1, \ldots, P_N$ nezavisne slučajne promenljive.

Pošto svaki voz stiže nezavisno, broj dolazaka koji upada u određeni region imaće binomnu raspodelu.

Činjenica 86
Neka je $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ PPP nad A mere intenziteta μ. Za B koji je merljiv podskup od A, dat broj tačaka u PPP:

$$[\#(P \cap B) | \#(P)] \sim \mathsf{Bin}(\#(P), \mu(B)/\mu(A)).$$

Primer 54
Nastavljajući poslednji primer, ako ima tačno tri voza u prva tri sata, kolika je šansa da tačno jedan stigne u prvom satu?

Rešenje Svaki od ova tri voza je nezavisan, tako da je broj vozova u prvom satu $N_{[0,1]} \sim \mathsf{Bin}(3, 1/3)$, i

$$\mathbb{P}(N_{[0,1]} = 3) = \binom{3}{1}(1/3)^1(2/3)^2 = 4/9 = \boxed{0.4444\ldots}.$$

Zadaci

22.1 Neka su N_1 and N_2 nezavisne Puasonove slučajne promenljive sa očekivanjima 2 i 3 respektivno. Kolika je šansa da je $N_1 + N_2 = 5$?

22.2 Neka su $N_1, \ldots, N_{10}$ Puasonove slučajne promenljive sa očekivanjem 0.5. Kolika je šanda da je njihov zbir veći od 1?

22.3 EPA lokacije za čišćenje u okrugu su modelovane kao PPP sa stopom $\lambda = 3/\mathrm{mi}^2$.

a) Ako region ima površinu od 9 kvadratnih milja, koliki je očekivani broj mesta za čišćenje?

b) Ako se zna da region ima najmanje 25 lokacija za čišćenje, kolika je šansa da ima najmanje 30 takvih lokacija? (Verovatno želite da koristite računar da ovo izračunate.)

22.4 Epidemiološki model pokriva grad veličine 4 kvadratne milje. Pretpostavimo da u tom modelu epidemije bolesti izbijaju prateći Puasonov tačkasti proces intenziteta 10 po kvadratnoj milji.

a) Koliki je srednji broj zaraženih u gradu?

b) Pomoću računara pronađite verovatnoću da je zaraženo više od prosečnog broja.

c) Koliki je srednji broj zaraženih u okolini veličine 2.3 kvadratne milje?

22.5 Pretpostavimo $P \sim \text{Pois}([0,2], \lambda \cdot \ell)$, gde je $\lambda > 0$ konstanta i ℓ Lebegova mera. Ako je $N_{[0,2]} = 10$, koja je šansa da je $N_{[0,1]} = 4$?

22.6 Borovi u šumi su modelovani kao Puason tačkasti proces intenziteta 15.4 po kvadratnom kilometru. Pretpostavimo da je šuma podeljena na dva dela, nagib veličine 14 kvadratnih kilometara i ravan region veličine 23.1. Pretpostavimo da u šumi ima 597 borova.

a) Koliki je prosečan broj stabala na padini?

b) Kolika je šansa da ima više od prosečnog broja stabala na padini?

22.7 Izbijanje bolesti je modelovano kao Puasonov tačkasti proces intenziteta 2.3 po kvadratnoj milji.

a) Ako je grad površine 3 kvadratne milje, kolika je šansa da ima tačno 6 žarišta bolesti?

b) Pretpostavimo da je deo grada zapadno od reke 1.2 kvadratne milje (ostavljajući 1.8 kvadratnih milja istočno od reke). Ako postoji tačno 8 žarišta širom grada, kolika je šansa da ih je najmanje 3 na zapadnoj strani reke?

22.8 Defekti čeličnog lima su modelovani kao da se javljaju 6.1 po kvadratnom metru. Ako ima 23 defekta na listu veličine 4 kvadratnih metara, kolika je šansa da deo veličine jedan kvadratni metar ima tačno 6 nedostataka?

Glava 23

Zajedničke gustine u višim dimenzijama

Pitanje dana Pretpostavimo da (X_1, X_2, X_3) ima zajedničku gustinu

$$f_{(X_1,X_2,X_3)}(x_1, x_2, x_3) = (1/3)[x_1 + 2x_2 + 3x_3]\mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]),$$

i naći $\mathbb{E}[X_1X_2X_3]$.

Sažetak Slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ ima gustinu $f_{X_1,\ldots,X_n}$ u odnosu na meru μ ako za sve događaje A,

$$\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A) = \int_{(x_1,\ldots,x_n)\in A} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, d\mu.$$

Naći marginalne raspodele za višedimenzione integrale.

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, d\mu.$$

Naći očekivanu vrednost neke funkcije promenljivih:

$$\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_N)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) f_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_n)\, d\mu.$$

23.1 Nalaženje verovatnoća

Podsetimo se da se gustine koriste za izračunavanje verovatnoća i za nalaženje očekivane vrednosti. Zajedničke gustine u višim dimenzijama takođe. Isti metod važi i za pronalaženje verovatnoća.

Činjenica 87
Za A merljivi podskup od $\mathbb{R}^n$, i $(X_1, \ldots, X_n)$ sa zajedničkom gustinom $f_{X_1,\ldots,X_n}$,

$$\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A) = \int_{(x_1,\ldots,x_n)\in A} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, d\mu.$$

Primer 55
Neka (X_1, X_2, X_3) imaju gustinu

$$f_{(X_1,X_2,X_3)}(x_1, x_2, x_3) = (1/3)[x_1 + 2x_2 + 3x_3]\mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in [0, 1])$$

u odnosu na Lebegovu meru. Treba naći $\mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq 0.5)$.

Rešenje Događaj $\{\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq 0.5\}$ je jednak $\{X_1 \in [0, 0.5], X_2 \in [0, 0.5], X_3 \in [0, 0.5]\}$. Dakle, integral je

$$\int_{x_1\in[0,0.5],x_2\in[0,0.5],x_3\in[0,0.5]} (1/3)[x_1 + 2x_2 + 3x_3]\, d\mathbb{R}^3 = 1/16 = \boxed{0.06250}.$$

23.2 *Nalaženje očekivanja*

Očekivane vrednosti se takođe tretiraju na isti način kao i ranije, Zakonom nesvesnog statističara:

Činjenica 88
Za slučajne promenljive $(X_1, \ldots, X_n)$ sa zajedničkom gustinom $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$ u odnosu na μ, ako $\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_n)]$ postoji, onda

$$\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_n)] = \int_{(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{R}^n} g(s_1, \ldots, s_n) f_{X_1,\ldots,X_n}(s_1, \ldots, s_n)\, d\mu.$$

Ovo se može koristiti za rešavanje pitanja dana!

Pitanje dana Koristeći Zakon nesvesnog statističara,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1X_2X_3] &= \int_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3} x_1x_2x_3(1/3)[x_1 + 2x_2 + 3x_3]\mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in [0, 1])\, d\mathbb{R}^3 \\
&= \int_{x_1\in[0,1],x_2\in[0,1],x_3\in[0,1]} x_1x_2x_3(1/3)[x_1 + 2x_2 + 3x_3]\, d\mathbb{R}^3 \\
&= 1/6 = \boxed{0.1666\ldots}.
\end{aligned}$$

23.3 *Test nezavisnosti*

Zapamtite da su za bivarijantne slučajne promenljive, slučajne promenljive nezavisne ako je zajednička gustina proizvod marginalnih gustina. Isto važi i za slučaj više dimenzije.

Činjenica 89 (Nezavisnost znači da je zajednička proizvod graničnih gustina)
Uzmimo slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ gde svaka X_i ima gustinu f_{X_i} u odnosu na μ_i. Onda su $\{X_i\}$ nezavisne ako i samo ako je $\prod_{i=1}^n f_i$ zajednička gustina $\{X_i\}$ u odnosu na meru proizvod $\times_{i=1}^n \mu_i$.

Činjenica 90
Ako se zajednička gustina f for $X_1, \ldots, X_n$ raščlanjuje u proizvod n gustina, onda su X_i nezavisne.

Primer 56
Pretpostavimo da $X_1, \ldots, X_n$ imaju zajedničku gustinu

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(s_1, \ldots, s_n) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} s_i\right) \mathbb{1}(s_1, \ldots, s_n \geq 0).$$

Pokazati da su X_i nezavisne.

Rešenje Pošto je

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} s_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(-s_i)$$
$$\mathbb{1}(s_1, \ldots, s_n \geq 0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}(s_i \geq 0),$$

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(s_1, \ldots, s_n) = \prod_{i=1}^{n} \exp(-s_i)\mathbb{1}(s_i \geq 0).$$

Zapamtite da, da bismo pokazali da slučajne promenljive nisu nezavisne, sve što nam je potrebno su događaji gde verovatnoća da se događaj desi nije proizvod pojedinačnih događaja.

Primer 57
Neka (X_1, X_2, X_3) imaju gustinu

$$f_{(X_1,X_2,X_3)}(x_1, x_2, x_3) = (1/3)[x_1 + 2x_2 + 3x_3]\mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in [0, 1])$$

u odnosu na Lebegovu meru. Pokazati da X_i nisu nezavisne.

Rešenje U jednom pređašnjem primeru pokazali smo da

$$\mathbb{P}(X_1 \in [0, 0.5], X_2 \in [0, 0.5], X_3 \in [0, 0.5]) = 1/16.$$

Međutim,

$$\mathbb{P}(X_1 \in [0, 0.5]) = \int_{[0,0.5]\times[0,1]\times[0,1]} (1/3)(x_1 + 2x_2 + 3x_3)\, d\mathbb{R}^3 = 11/24,$$
$$\mathbb{P}(X_2 \in [0, 0.5]) = \int_{[0,1]\times[0,0.5]\times[0,1]} (1/3)(x_1 + 2x_2 + 3x_3)\, d\mathbb{R}^3 = 10/24,$$
$$\mathbb{P}(X_3 \in [0, 0.5]) = \int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,0.5]} (1/3)(x_1 + 2x_2 + 3x_3)\, d\mathbb{R}^3 = 9/24,$$

I $(11/24)(5/24)(9/24) = 55/768 = 0.0716\ldots$ što nije jednako $1/16 = 0.0625$.

23.4 *Nalaženje marginalnih*

Da bi našli marginalnu gustinu slučajne promenljive, možemo *skroz integraliti* drugu promenljivu.

Primer 58
Neka (X_1, X_2, X_3) imaju gustinu

$$f_{(X_1,X_2,X_3)}(x_1, x_2, x_3) = (1/3)[x_1 + 2x_2 + 3x_3]\mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in [0, 1])$$

u odnosu na Lebegovu meru. Naći gustinu od X_1.

Rešenje

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \in A) &= \mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in \mathbb{R}, X_3 \in \mathbb{R}) \\
&= \int_{x_1 \in A} \int_{x_2 \in \mathbb{R}} \int_{x_3 \in \mathbb{R}} \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{3} \mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in [0, 1])\, dx_3\, dx_2\, dx_1 \\
&= \int_{x_1 \in A} \int_{x_2 \in \mathbb{R}} \left. \frac{x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + (3/2)x_3^2}{3} \right|_0^1 \mathbb{1}(x_1, x_2 \in [0, 1])\, dx_2\, dx_1 \\
&= \int_{x_1 \in A} \int_{x_2 \in [0,1]} (1/3)[x_1 + 2x_2 + 3/2]|\mathbb{1}(x_1 \in [0, 1])\, dx_2\, dx_1 \\
&= \int_{x_1 \in A} (1/3)[x_1 x_2 + x_2^2 + (3/2)x_2]|_0^1 \mathbb{1}(x_1 \in [0, 1])\, dx_1 \\
&= \int_{x_1 \in A} (1/3)[x_1 + 5/2]\mathbb{1}(x_1 \in [0, 1])\, dx_1.
\end{aligned}$$

Dakle gustina od X_1 mora biti

$$\boxed{f_{X_1}(x_1) = (1/3)[x_1 + 5/2]\mathbb{1}(x_1 \in [0, 1]).}$$

Zadaci

23.1 Neka (X_1, X_2, X_3) ima zajedničku gustinu

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)} \propto (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)\mathbb{1}((x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3).$$

a) Naći normalizovanu gustinu.

b) Naći marginalnu gustinu od X_1.

c) Naći očekivanje od X_1.

23.2 Neka je (X_1, X_2, X_3) ima zajedničku gustinu

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]).$$

a) Naći marginalnu gustinu od X_1.

b) Naći $\mathrm{Cov}(X_1, X_3)$.

23.3 Neka $X_1, \ldots, X_n$ imaju zajedničku gustinu

$$(1/10)^n \mathbb{1}((x_1, \ldots, x_n) \in [0, 10]^n).$$

Pokazati da su X_i nezavisne.

23.4 Neka su Z_1, Z_2, Z_3 iid standardne normalne slučajne promenljive. Naći njihovu zajedničku gustinu.

23.5 Neka X i Y imaju zajedničku gustinu

$$f_{(X,Y)}(x,y) = (3/4)xy^2\mathbb{1}(x \in [0,1])\mathbb{1}(y \in [0,2]).$$

Pokazati da su X i Y nezavisne.

23.6 Neka X i Y imaju zajedničku gustinu

$$f_{(X,Y)}(x,y) = (2/3)(x+2y)\mathbb{1}(x \in [0,1], y \in [0,1]).$$

a) Naći $\mathbb{P}(X \leq 0.5)$.

b) Naći $\mathbb{P}(Y \leq 0.5)$.

c) Naći $\mathbb{P}(X \leq 0.5, Y \leq 0.5)$.

d) Dokazati da X i Y nisu nezavisne.

Glava 24

Bajesovo pravilo za gustine

Pitanje dana Lek snižava holesterol za 20 ili više jedinica sa nepoznatom verovatnoćom p. Statističar modelira $p \sim \mathsf{Unif}([0,1])$ i pojedince kao nezavisne Bernulijeve slučajne promenljive. U studiji na 17 pojedinaca, lek je bio efikasan kod 4 njih. Uslovljeno ovom informacijom, koja je nova raspodela za p?

Sažetak Neka X_1 and X_2 imaju zajedničku gustinu $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$. Bajesovo pravilo za gustine je tada

$$f_{[X_1|X_2=x_2]}(x_1) = \frac{f_{[X_2|X_1=x_1]}(x_2)f_{X_1}(x_1)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

Podsetimo se tog Bajesovog pravila za događaje pozitivne verovatnoće koje nam omogućava da okrenemo uslovljavanje. Ako znamo raspodelu X datog Y, onda nam Bajesovo pravilo dozvoljava da odredi I dato X. Pravilo kaže (za $\mathbb{P}(Y \in B)$ nenegativne),

$$\mathbb{P}(X \in A|Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(Y \in B|X \in A)\mathbb{P}(X \in A)}{\mathbb{P}(Y \in B)}.$$

Kada radimo sa događajima tipa $\{X = s\}$, za neprekidne funkcije to će biti 0. Tako da umesto toga posmatramo događaj $\{X \in ds\}$, događaj da je X u infinitezimalno malom intervalu oko s. Kada uslovljavamo, $\{X \in ds\}$ i $\{X = s\}$ su isti: znanje da smo proizvoljno blizu s i tačno u s nam daju istu informaciju. Ali, kad hoćemo da nađemo $\mathbb{P}(X \in ds)$, znamo da je to $f_X(s)\,ds$, dakle infinitezimalno malo, ali ipak ne-nula. Ubacivaje Bajesovog pravila onda daje:

$$\begin{aligned}
f_{X|Y=y}(x)\,dx &= \mathbb{P}(X \in dx | Y = y) \\
&= \mathbb{P}(X \in dx | Y \in dy) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \in dx, Y \in dy)}{\mathbb{P}(Y \in dy)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Y \in dy | X \in dx)\mathbb{P}(X \in dx)}{\mathbb{P}(Y \in dy)} \\
&= \frac{f_{Y|X=x}(y)\,dy\,f_X(x)\,dx}{f_Y(y)\,dy} \\
&= \frac{f_{Y|X=x}(y) f_X(x)\,dx}{f_Y(y)}
\end{aligned}$$

Gore navedeno nije matematički dokaz (ne možete samo da poništite dy termine bez opravdanja u formalnom dokazu), ali se može učiniti preciznim, a sledeći rezultat važi za gustine.

Teorema 7 (Bajesovo pravilo za gustine)
Neka X ima gustinu f_X a Y gustinu f_Y (ne nužno u odnosu na istu meru.) Onda za y takvo da $f_Y(y) > 0$,

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{Y|X=x}(y) f_X(x)}{f_Y(y)}.$$

Neke napomene!

- Teorema kaže da rezultati važe čak i ako gustine nisu u odnosu na iste mere. Konkretno, jedna od slučajnih promenljivih može biti diskretna, a druga neprekidna, i rezultat i dalje važi.

- Ako ne znate $f_Y(y)$, ovaj rezultat kaže da je

$$f_{X|Y=y}(x) \propto f_{Y|X=x}(y) f_X(x).$$

  Prisetite se da $\propto$ ovde znači *proporcionalno*, što znači da postoji faktor koji ne zavisi od x (ali može zavisiti od y) množenjem desne strane da se napravi nejednakost. Kako pronaći taj faktor? Zapamtite da je leva strana gustina, pa ako integrišemo obe strane u odnosu na x, to bi trebalo da bude jednako 1. To nam omogućava da pronađemo konstantu.

- Statističari početnu raspodelu od X, pre učenja vrednosti Y, nazivaju *priornom.* Gustina od Y dato X naziva se *verodostojnost*, a raspodela od X nakon saznanja vrednosti Y je *posteriorna.* Dakle, Bajesovo pravilo za gustine se može napisati sa manje formalnim zapisom kao

$$\text{posteriorna gustina} \propto \text{priorna gustina} \cdot \text{verodostojnost}.$$

Pitanje dana. Hajde sada da ilustrujemo ove ideje sa pitanjem dana. Na početku, $p \sim \mathsf{Unif}([0,1])$. Ovo je priorna raspodela za p. To znači $f_p(t) = \mathbb{1}(t \in [0,1])$.

Zatim, neka N označava broj osoba za koje je lek radio. Onda znamo da pošto su ispitivanja bila nezavisna, da tada $[N|p] \sim \mathsf{Bin}(17, p)$. To znači da $[N|p]$ ima gustinu

$$f_{N|p=t}(i) = \binom{17}{i} t^i (1-t)^{17-i} \mathbb{1}(\{i \in \{0, \ldots, 17\}).$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f_{p|N=i}(t) &\propto f_p(t) f_{N|p=t}(i) \\ &= \mathbb{1}(t \in [0,1]) \binom{17}{i} t^i (1-t)^{17-i} \mathbb{1}(\{i \in \{0,\dots,17\}) \\ &\propto \mathbb{1}(t \in [0,1]) t^i (1-t)^{17-i}. \end{aligned}$$

Pošto je binomni koeficijent 17 nad i i $\mathbb{1}(i \in \{0,\dots,17\})$ ne zavise od t, apsorbuju se u konstantu proporcionalnosti.

Sada, da bismo pronašli konstantu proporcionalnosti, integralimo rezultat u odnosu na t koriste?i podatke da je $N = 4$:

$$1 = C \int_{t \in \mathbb{R}} t^4 (1-t)^{17-4} \mathbb{1}(t \in [0,1])\, dt = C \int_{t \in [0,1]} t^4 (1-t)^{17-4}\, dt = \frac{C}{42840}$$

i dakle $C = 42840$.

Otuda je konačna raspodela

$$\boxed{f_{p|N=4}(t) = 42840 t^4 (1-t)^{13} \mathbb{1}(t \in [0,1]).}$$

U stvari, nismo morali da radimo integraciju da smo prepoznali da je ovo *Beta* raspodela sa parametrima 5 i 14. Dakle,

$$\boxed{[p|N=4] \sim \mathsf{Beta}(5,14).}$$

bi takođe bio prihvatljiv odgovor.

Imajte na umu da je $\mathsf{Unif}([0,1]) = \mathsf{Beta}(1,1)$. Otuda, priorna raspodela je beta , i posteriorna raspodela je beta.

Definicija 66
Ako priorna i posteriorna za Bajesovu analizu pripadaju istoj porodici raspodela, nazivamo ih **konjugovanim**.

Neka je priorna raspodela

$$p \sim \mathsf{Beta}(a,b),$$

i podaci dato p su $N \sim \mathsf{Bin}(n,p)$. Onda je posteriorna raspodela

$$[p|N=i] \sim \mathsf{Beta}(a+i, b+(n-i)).$$

Prema tome, kažemo da je Beta porodica konjugovana sa binomskom verodostojnošću.

Postoji nekoliko desetina porodica raspodela i verodostojnosti koje su konjugovane. Kada radimo sa ovim određenim porodicama, proračuni postaju veoma laki.

Primer 59
Neka je $Y \sim \mathsf{Exp}(100)$, i $[X|Y] \sim \mathsf{Exp}(Y)$. Dato da je $X = 42$, koja je nova raspodela od Y?

Rešenje Ovde je $f_Y(s) = 100\exp(-100s)\mathbb{1}(s \geq 0)$, $f_{X|Y=s}(t) = s\exp(-st)\mathbb{1}(t \geq 0)$, i onda

$$\begin{aligned} f_{Y|X=t}(s) &\propto 100\exp(-100s)\mathbb{1}(s \geq 0)s\exp(-st)\mathbb{1}(t \geq 0) \\ &\propto s\exp(-(100+t)s)\mathbb{1}(s \geq 0). \end{aligned}$$

Integraljenje desne strane za $s \in \mathbb{R}$ daje

$$\int_{s \geq 0} s\exp(-(100+t)s)\,ds = \frac{1}{(100+t)^2}.$$

Dakle

$$f_{Y|X=42} = 142^2 s\exp(-142s)\mathbb{1}(s \geq 0).$$

To jest, $\boxed{[Y|X = 42] \sim \mathsf{Gamma}(2, 142)}$.

Zadaci

24.1 Neka je $A \sim \mathsf{Unif}\{1,2,3,4,5,6\}$ i $[B|A] \sim \mathsf{Exp}(A)$. Dato da je $B = 3.6$, koja je raspodela od A?

24.2 Neka je $X \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4\})$ i $[Y|X] \sim \mathsf{Unif}([0,X])$. Dato da je $Y = 2.4$, koja je raspodela od X?

24.3 Pretpostavimo da $X_1 \sim \mathsf{Unif}([0,10])$ i $X_2 \sim \mathsf{Unif}([0,20])$. Neka je $B \sim \mathsf{Unif}\{1,2\}$.

a) Dato da je $X_B = 15$, koja je verovatnoća da je $B = 2$?
b) Dato da je $X_B = 7$, koja je verovatnoća da je $B = 2$?

24.4 Pretpostavimo da $Y_1 \sim \mathsf{Exp}(1)$, $Y_2 \sim \mathsf{Exp}(2)$ i $B \sim \mathsf{Unif}(\{1,2\})$. Naći

$$\mathbb{P}(B = 1|Y_B = 4.3).$$

24.5 Kompanija za lekove veruje da je novi tretman efikasan kod pacijenata sa verovatnoćom p, gde je p uniformno na intervalu $[0,1]$. Ispitivanje leka nastavlja se na pacijentima sve dok se ne pronađu četiri pacijenta kod kojih je lek efikasan. Studija je morala da uključi $N = 21$ pacijenata pre nego što su otkrili četiri na kojima je lek delovao.

S obzirom na ove informacije, koja je nova raspodela od p?

24.6 Nastavljajući sa poslednjim problemom, kompanija za lekove nastavlja da testira pacijente dok se ne pronađu još dva kod kojih je lek efikasan. U ovom drugom ispitivanju, viđeno je još 8 pacijenata, i pronašli su dva kod kojih je lek bio efikasan. Na osnovu informacija i iz prvog ispitivanja, kakva je nova raspodela za p?

Glava 25

Nejdnakosti repa raspodele: Markov i Čebišev

Pitanje dana Neka je $\mathbb{E}[|X|] = 5$. Oceniti $\mathbb{P}(|X| \geq 10)$.

Sažetak Markovljeva nejednakost kaže da za integrabilnu slučajnu promenljivu X i $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \mathbb{E}[|X|]/a.$$

Čebiševljeva nejednakost kaže da za slučajnu promenljivu X sa konačnom varijansom i $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq a) \leq \mathbb{V}(X)/a^2.$$

Raspodele verovatnoće sa gustinama $f(a)$ moraju imati gustinu koja teži nuli kako a postaje veoma veliko ili veoma malo. Ali, šta je sa površinom ispod gustine? *Nejednakosti repa* su način davanja gornje granice ove vrste verovatnoće.

Prva i najjednostavnija nejednakost repa naziva se Markovljeva nejednakost. Ima ograničenu upotrebu u aplikacijama, ali služi kao gradivni blok za stvaranje snažnijih repnih nejednakosti, koje se češće koriste u praksi.

U suštini, ono što Markovljeva nejednakost govori jeste za $\mathbb{E}[|X|]$ da bi bio mali ne može se staviti prevelika težina nakon a.

Činjenica 91 (Nejednakost Markova)
Neka je X slučajna promenljiva sa konačnim očekivanjem. Onda za sve $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}.$$

Dokaz. Primetimo da ako pomnožimo $|X|$ sa 0 ili 1, proizvod će biti najviše $|X|$. To jest

$$|X| \geq |X|\mathbb{1}(|X| \geq a).$$

Kada je $\mathbb{1}(|X| \geq a) = 1$, $|X| \geq a$, i onda

$$|X| \geq |X|\mathbb{1}(|X| \geq a) \geq a\mathbb{1}(|X| \geq a).$$

Prisetimo se da očekivanje čuva nejednakosti tako da

$$\mathbb{E}[|X|] \geq \mathbb{E}[a\mathbb{1}(|X| \geq a)] = a\mathbb{E}[\mathbb{1}(|X| \geq a)] = a\mathbb{P}(|X| \geq a).$$

□

Napomena Nejednakost Markova se nekad predstavlja kao:

> *Za bilo koju nenegativnu slučajnu promenljivu X sa konačnim očekivanjem i $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}[X]/a$.*

Ovo je ekvivalentno drugoj formulaciji. Forma #2 implicira formu #1 pošto je $|X|$ nenegativna slučajna promenljiva. Forma #1 implicira formu #2 jer je za nenegativnu slučajnu promenljivu, $|X| = X$.

Nejednakost Markova se može iskoristiti da odgovorimo na pitanje dana. Tamo nam je dato da je $\mathbb{E}[|X|] = 5$, i cilj je oceniti $\mathbb{P}(|X| \geq 10)$. Ovde je $a = 10$, i Markovljeva nejednakost nam daje

$$\mathbb{P}(|X| \geq 10) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{10} = \frac{5}{10} = \boxed{0.5000}.$$

Jedna od lepih stvari u vezi sa Markovljevom nejednakošću je da ona može biti primenjena bez poznavanja tačnih vrednosti parametara koji opisuju distribuciju.

Primer 60
Uzmimo $A \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$. Oceniti odozgo $\mathbb{P}(A \geq 5/\lambda)$ koristeći nejednakost Markova.

Rešenje Pošto $A \geq 0$, $|A| = A$. Takodje, $\mathbb{E}[A] = 1/\lambda$, so

$$\mathbb{P}(A \geq 5/\lambda) = \frac{1/\lambda}{5/\lambda} = \frac{1}{5} = \boxed{0.2000}.$$

25.1 Nejednakost Čebiševa

Markovljevu nejednakost je zapravo prvi pokazao Markovljev mentor na doktoratu, Čebišev. Markov je ponovo dokazao taj rezultat kao deo svoje doktorske teze. Čebiševa je interesovala jača nejednakost, koja je koristila ne samo prvi momenat slučajne promenljive, nego i drugi. Ova nejednakost daje način da se ograniči koliko je udaljena slučajna promenljiva od njene očekivane vrednosti.

Činjenica 92 (Nejednakost Čebiševa)
Pretpostavimo da X ima konačne prvi i drugi momenat. Onda za svako $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Dokaz. Neka je $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$. Onda $|Y| = Y$, i nejednakost Markova kaže da za sve $a > 0$,

$$\mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a^2}.$$

Ali $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{V}(X)$ po definiciji, i $\{Y \geq a^2\} \Leftrightarrow \{|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\}$. I tako je dokazana nejednakost. □

Primer 61
Uzmimo $A \sim \text{Exp}(\lambda)$. Oceniti odozgo $\mathbb{P}(A \geq 5/\lambda)$ koristeći nejednakost Čebiševa.

Rešenje Pošto je $A \geq 0$, $|A| = A$. Isto tako, $\mathbb{E}[A] = 1/\lambda$, i $\mathbb{V}(A) = 1/\lambda^2$, tako da

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \geq 5/\lambda) &= \mathbb{P}(A - 1/\lambda \geq 4/\lambda)\\ &\leq \mathbb{P}(|A - 1/\lambda| \geq 4/\lambda)\\ &\leq \frac{\mathbb{V}(A)}{(4/\lambda)^2}\\ &= \frac{1/\lambda^2}{16/\lambda^2}\\ &= \frac{1}{16} = \boxed{0.06250}.\end{aligned}$$

U ovom slučaju, Čebiševljeva nejednakost je dala bolji rezultat od Markovljeve, ali to nije uvek tako. Pošto su obe nejednakosti tačne, uvek možete pronaći obe granice i uzeti manji od dva rezultata.

Ako stavimo $a = k\,\text{SD}(X)$, onda $\mathbb{V}(X)/a^2 = 1/k^2$ i dobijamo alternativnu formu Čebiševljeve nejednakosti.

Činjenica 93 (Nejednakost Čebiševa (alternativna forma))
Pretpostavimo da X ima konačno očekivanje i standardnu devijaciju. Onda za sve $k > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k\,\text{SD}(X)) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Drugi način da se ovo kaže je da šanse da je slučajna promenljiva najmanje k standardnih devijacija daleko od očekivanja opadaju barem kvadratno po k.

Prosek uzorka Neka su $X_1, X_2, \ldots \sim X$ iid i pogledajmo njihov prosek

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Iz linearnosti očekivanja imamo

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]}{n} = \frac{n\mathbb{E}[X]}{n} = \mathbb{E}[X],$$

tako da prosek uzorka uvek ima isto očekivanje kao i početna funkcija.

Sa druge strane,

$$\text{SD}(S_n) = \sqrt{\mathbb{V}(S_n)} = \sqrt{\frac{\mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)}{n^2}} = \sqrt{\frac{n\mathbb{V}(X)}{n^2}} = \frac{\text{SD}(X)}{\sqrt{n}}.$$

Po Čebiševu ovo nam kaže da

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Dakle, Čebiševljeva nejednakost nam kaže da će prosek uzorka uvek biti sve bliže i bliže očekivanju. Medjutim, ova konvergencija je samo inverzno linearno po n. U praksi, prosek uzorka konvergira mnogo brže do pravog rezultata.

Da bismo pokazali eksponencijalno brzu konvergenciju za proseke uzoraka, potrebna nam je još moćnija nejednakost, a to je Černofova nejednakost u sledećem odeljku.

Zadaci

25.1 Neka je X slučajna promenljiva sa očekivanjem 0.4, srednjom apsolutnom devijacijom 1.5, i standardnom devijacijom 2.

a) Oceniti odozgo $\mathbb{P}(|X - 0.4| > 4)$ koristeći nejednakost Markova.

b) Oceniti odozgo $\mathbb{P}(|X - 0.4| > 4)$ koristeći nejednakost Čebiševa.

c) Koja ocena je bolja? (To jest, ako vam se traži da date gornju ocenu za $\mathbb{P}(|X - 0.4| > 4)$, šta biste rekli?)

25.2 Uzmimo da Y ima očekivanje 2.3, srednju apsolutnu devijaciju 1.1, i standardnu devijaciju 1.8. Ocenite $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| > 3)$ najbolje što možete, koristeći nejednakosti Markova i Čebiševa.

25.3 Građevinski projekat će trajati neko nepoznato vreme. Graditelji veruju da će srednja vrednost biti pedeset dana sa standardnom devijacijom od deset dana.

a) Dajte gornju granicu za šansu da projekat traje najmanje šezdeset dana.

b) Dajte gornju granicu za šansu da projekat traje najmanje sto dana.

25.4 Uzmimo da $X \geq 0$ ima $\mathbb{E}[X] = \mu$ i $\mathbb{V}(X) = 1.3\mu$.

a) Oceniti $\mathbb{P}(X \geq 5\mu)$ koristeći nejednakost Markova.

b) Oceniti $\mathbb{P}(X \geq 5\mu)$ koristeći nejednakost Čebiševa.

25.5 Outreach Solutions svakodnevno opslužuje broj klijenata uniformno na $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Neka je N ukupan broj klijenata opsluživan tokom sedam dana.

a) Koje je očekivanje od N?

b) Koja je standardna devijacija od N?

c) Koristeći činjenicu da je N simetrično u odnosu na svoje očekivanje, dajte donju granicu za verovatnoću da je $N \leq 26$.

25.6 Proizvodni pogon isporučuje 100 kutija dnevno, od kojih svaka sadrži 300 artikala. Ako je svaka pojedinačna stavka neispravna sa verovatnoćom $0,01$ nezavisno od ostalih, oceniti odozgo verovatnoću da je više od 600 artikala neispravno.

25.7 Pretpostavimo da X ima konačno očekivanje μ i standardnu devijaciju σ. Sve slučajne promenljive imaju bar jednu medijanu. Pokazati da mora postojati bar jedna medijana za X negde (striktno) između $\mu - \sqrt{3}\sigma$ i $\mu + \sqrt{3}\sigma$.

25.8 Ograničiti verovatnoću da je slučajna promenljiva X udaljena više od $2,5$ standardnih devijacija od svoje srednje vrednosti.

25.9 Vreme izgradnje projekta T ima sledeću srednju vrednost, standardnu devijaciju, srednju apsolutnu devijaciju i funkciju generatrisu momenata na 0.5:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= 100\\ \sqrt{\mathbb{E}[(T-\mathbb{E}[T])^2]} &= 15\\ \mathbb{E}(|T-\mathbb{E}[T]|) &= 12\\ \mathbb{E}(\exp(0.5T)) &= \exp(63).\end{aligned}$$

Koristeći ove činjenice zajedno sa Markovim i Čebiševom, postavite što bolju gornju granicu za $\mathbb{P}(T > 130)$. Obavezno pokažite ceo postupak!

25.10 Neka je X nenegativna slučajna promenljiva takva da je $\mathbb{E}[X^3] = 30$. Iskoristite ovo da ograničite verovatnoću za $X > 10$.

Glava 26

Nejednakosti repa: Černof

Pitanje dana Pretpostavimo da su $X_1, X_2, \ldots, X_{20} \sim X$ iid gde je

$$\mathbb{P}(X = -0.5) = \mathbb{P}(X = 0.7) = 1/2.$$

Oceniti verovatnoću da je $X_1 + \cdots + X_{20} \geq 10$.

Sažetak Nejednakost Černofa kaže da za slučajnu promenljivu X sa konačnom funkcijom generatrisom momenata $\mathrm{mgf}_X(t)$ takvom da je

$$(\forall t \geq 0)(\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{mgf}_X(t) \exp(-ta),$$

i

$$(\forall t \leq 0)(\mathbb{P}(X \leq a) \leq \mathrm{mgf}_X(t) \exp(-ta),$$

dato da mgf_X postoji za te vrednosti t.

Za Markovljevu nejednakost koristili smo očekivanu vrednost a za Čebiševljevu nejednakost koristili smo varijansu. Za *Černofovu nejednakost* koristićemo funkciju generatrisu momenata. Ovo će nam omogućiti da dobijemo nejednakosti za sume i proseke uzorka koji se eksponencijalno brzo smanjuju sa brojem izvlačenja.

Prvo, nejednakost

Činjenica 94 (Nejednakost Černofa)
Za slučajnu promenljivu X i svako $t > 0$ gde postoji $\mathrm{mgf}_X(t)$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{mgf}_X(t) \exp(-ta).$$

Za svako $t < 0$ gde postoji $\mathrm{mgf}_X(t)$,

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq \mathrm{mgf}_X(t) \exp(-ta).$$

Dokaz. Primetimo da za $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(tX \geq ta) = \mathbb{P}(\exp(tX) \geq \exp(ta)),$$

što je najviše $\mathbb{E}[\exp(tX)]/\exp(ta)$ prema Markovljevoj nejednakosti.

Druga nejednakost se pokazuje na sličan način. □

Primenimo ovu nejednakost na pitanje dana. Setimo se da pošto su X_i iid raspodeljeni kao X,

$$\operatorname{mgf}_{X_1+\cdots+X_{20}}(t) = \operatorname{mgf}_{X_1}(t)\operatorname{mgf}_{X_2}(t)\cdots\operatorname{mgf}_{X_{20}}(t) = \operatorname{mgf}_X(t)^{20}.$$

Odatle je

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{20}\geq 10) = \operatorname{mgf}_X(t)^{20}\exp(-10t) = [\operatorname{mgf}_X(t)\exp(-0.5t)]^{20}.$$

Napisali smo izraz kao 20-ti stepen da bi naglasili da granica verovatnoće koju je dao Černof opada eksponencijalno kako broj slučajnih promenljivih u zbiru raste.

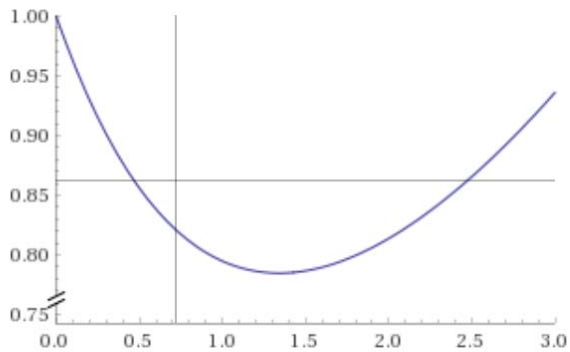
Sada

$$\operatorname{mgf}_X(t) = (1/2)\exp(-0.5t) + (1/2)\exp(0.7t),$$

tako da je

$$g(t) = \operatorname{mgf}_X(t)\exp(-0.5t) = [(1/2)\exp(-t) + (1/2)\exp(0.2t)].$$

Kada je $t = 0$ desna strana je jednaka 1, ali kako t raste, malo opada pre nego što opet počne da raste.



Izvod je jednak

$$g'(t) = -(1/2)\exp(-t) + (0.2)(1/2)\exp(0.2t).$$

Primetimo da je $g'(0) = (1/2)(-1) + (1/2)(0.2) < 0$ i $g'(3) > 0.9359 > 0$. Onda nalazimo kritične tačke:

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ -(1/2)\exp(-t_1) + (1/2)(0.2)\exp(0.2t) &= 0 \\ 1/0.2 &= \exp(1.2t) \\ t &= \ln(5)/1.2. \end{aligned}$$

Znači postoji jedinstvena vrednost $t_1 = \ln(5)/1.2$ takva da je $g'(t_1) = 0$, i $g'(t)$ neprekidno, dakle $g(t)$ ima vrednost globalnog minimuma $g(t_1)$. Da nađemo t_1:

Stavljanjem to nazad u g daje $\exp(t) = 5^{1/2}$, i onda je

$$g(t_1) = (1/2)[5^{-1/1.2} + 5^{0.2/1.2}],$$

i dizanje na 20-ti stepen onda daje

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{20}\geq 10) \leq \boxed{0.007815}.$$

Ako uzmemo u obzir više cifara, odgovor je $0.00781493\ldots$ Pri skraćenju smo zaokružili poslednju cifru na gore jer dajemo gornju granicu.

26.1 Černof primenjen na Binomne

Sada hajde da se pozabavimo složenijim problemom: primenom Černofovih granica na raspodele, generalno. Konkretno, razmotrimo binomnu raspodelu. Ako je $B \sim \mathsf{Bin}(n,p)$, onda možemo da je predstavimo kao

$$B = B_1 + \cdots + B_n,$$

gde su svi B_i iid $\mathsf{Bern}(p)$. Svaki B_i ima f-ju generatrisu momenata

$$p\exp(t) + (1-p)\exp(0t) = p\exp(t) + 1 - p = 1 + p(\exp(t) - 1).$$

Korisna činjenica je da pošto je eksponencijalna funkcija konveksna, ona leži iznad bilo koje tangente. Tangenta na $\exp(x)$ u 1 je $1 + x$. Ovo znači da je $1 + x \leq \exp(x)$ za svako x, što daje

$$\mathrm{mgf}_{B_i}(t) \leq \exp(p\exp(t) - 1).$$

U proseku, binomna će biti jednaka np, ali će često biti veća. Uzmimo $\epsilon > 0$. Onda Černofova granica kaže da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B > (1+\epsilon)np) &\leq \mathrm{mgf}_B(t)\exp(-t(1+\epsilon)np). \\
&\leq [\exp(p\exp(t) - 1)\exp(-t(1+\epsilon)p)]^n \\
&= \exp(p\exp(t) - p - t(1+\epsilon)p)^n = \exp(g(t))^n.
\end{aligned}$$

Da bi desna strana bila što manja, napravimo $g(t)$ što manje moguće.

Diferenciranje daje

$$g'(t) = p\exp(t) - (1+\epsilon)p,$$

što raste sa t, dajući jedinstven globalni minimum u kritičnoj tački , $\exp(t) = 1 + \epsilon$. Stavimo ovo nazad u $g(t)$ i dobijemo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B > (1+\epsilon)np) &\leq \exp(p(1+\epsilon) - p - \ln(1+\epsilon)(1+\epsilon)p)^n \\
&= \left(\frac{\exp(p\epsilon)}{(1+\epsilon)^{(1+\epsilon)p}}\right)^n \\
&= \left(\frac{\exp(\epsilon)}{(1+\epsilon)^{(1+\epsilon)}}\right)^{np}.
\end{aligned}$$

To je malo teško raščlaniti, lakše je ako napišemo Tejlorov razvoj onoga što se nalazi unutar zagrada:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B > (1+\epsilon)np) &\leq \exp(p(1+\epsilon) - p - \ln(1+\epsilon)(1+\epsilon)p)^n \\
&= \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{6} + \frac{\epsilon^4}{24} - \cdots\right)^n.
\end{aligned}$$

Prva dva elementa impliciraju da će $n \approx 2\epsilon^{-2}\ln(1/\delta)$ biti potrebno za binomnu da se dobije

$$\mathbb{P}(B > (1+\epsilon)np) \leq \delta.$$

Sličan rezultat važi i za donju granicu.

Činjenica 95
Za $B \sim \mathsf{Bin}(n,p)$ i $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(B \geq (1+\epsilon)np) \leq \left(\frac{\exp(\epsilon)}{(1+\epsilon)^{(1+\epsilon)}}\right)^{np}$$
$$\mathbb{P}(B \leq (1-\epsilon)np) \leq \left(\frac{\exp(-\epsilon)}{(1-\epsilon)^{(1-\epsilon)}}\right)^{np}.$$

Zadaci

26.1 Pretpostavimo X ima generatrisu momemata $\mathrm{mgf}_X(t) = [(\exp(t)-1)/t]^{10}$. Oceniti $\mathbb{P}(X \geq 8)$ sa Černofom, koristeći $t = 5$.

26.2 Uzmimo $U_1, \ldots, U_{20} \sim \mathsf{Unif}([0,1])$.

a) Za $S = U_1 + \cdots + U_{20}$, naći $\mathrm{mgf}_S(t)$.

b) Iskoristiti Černofa da se oceni $\mathbb{P}(S \geq 13)$.

26.3 Iskoristite Černofovu nejednakost da date što bolju moguću gornju granicu za verovatnoću da je zbir od 12 iid slučajnih promenljivih uniformnih nad $[0,1]$ veći ili jednak broju 9.

26.4 Revizorsko preduzeće Markov obavi 0, 1 ili 2 provera svaki dan nezavisno, sa odgovarajućim verovatnoćama 20%, 40% i 40%. Neka X_i označava broj revizija na dan i.

a) Naći očekivanje i standardnu devijaciju od X_i.

b) Koristeći CGT aproksimirati verovatnoću da je u prvih 25 dana obavljeno bar 36 revizija.

c) Iskoristiti Čebiševljevu nejednakost da se oceni odozgo verovatnoća da je u prvih 25 dana obavljeno bar 36 revizija.

d) Iskoristiti Černofovu nejednakost sa $t = 0.5$ da se oceni odozgo ista verovatnoća.

Glava 27

Raspodele teškog i lakog repa

Pitanje dana Kako mogu da modelujem podatke bez varijanse? Bez očekivanja?

Sažetak Za slučajnu promenljivu X se kaže da ima raspodelu **teškog repa** ako postoji i takvo da je $\mathbb{E}[|X|^i] = \infty$. Ako je $i = 2$ onda X nema standardnu devijaciju a ako je $i = 1$ onda X nema očekivanje.

Standardna **Košijeva** raspodela je teškog repa. Ova raspodela nema očekivanje. Gustina standardne Košijeve je
$$\frac{2}{\tau} \cdot \frac{1}{1+s^2}.$$
Drugi primer raspodele teškog repa je **Zeta** (ili **Zipf**) raspodela sa parametrom s. Ova raspodela ima gustinu za $i \in \{1, 2, \ldots\}$:
$$\frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{i^s},$$
gde je $\zeta(s)$ Rimanova Zeta funkcija $\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^s$.

27.1 Raspodele lakog repa

Normalne slučajne promenljive su lepe. Gustina $\tau^{-1/2}\exp(-k^2/2)$ opada veoma, veoma brzo kako k postaje veliko, zbog čega je funkcija generatrisa momenata $\mathbb{E}[\exp(tZ)]$ konačna za bilo koje t. Primetite da ovde eksponenciramo Z, za šta biste mislili da bi ga u proseku učinilo prilično velikim. Ali Z je tako malo verovatno da će biti daleko od 0 da je ova funkcija generatrisa momenata definisana za sve t.

Eksponencijalne slučajne promenljive su lepe, ali ne baš tako lepe kao normalne. Njihova gustina je $\lambda \exp(-\lambda s)\mathbb{1}(s \geq 0)$, i imaju generatrisu momenata koja je konačna samo za $t \in (-\infty, \lambda]$. Za $A \sim \textsf{Exp}(\lambda)$ sa $\lambda > 0$, to znači da se generatrisa momenata može iskoristiti da se pokaže da je $\mathbb{E}[A^k] < \infty$ za sve celobrojne k. To znači da su svi momenti ovih slučajnih promenljivih konačni. Ovo motiviše definiciju raspodele *lakog repa.*

Definicija 67
Slučajna promenljiva A je **lakog repa** ako za svako $k \in \{1, 2, \ldots\}$,
$$\mathbb{E}[|A|^k] < \infty.$$

27.2 Raspodele teškog repa

Centralna granična teorema je jedna od najmoćnijih teorema u matematici, ali definitivno ne kaže da su „sve slučajne promenljive normalne". CGT se primenjuje samo kada se dodaju slučajne promenljive, ne primenjuje se kada se množe slučajne promenljive. Ovaj slučaj se dešava u situacijama kao što su raspodela prihoda, raspodela stanovništva, upotreba reči i mnogi drugi konteksti.

Kod oog tipa podataka često se pojavljuju *raspodele teškog repa*. One nemaju funkciju generatrisu momenata koja je konačna svuda osim u $t = 0$. Za ove slučajne promenljive postoji neko k takvo da je $\mathbb{E}[|X|^k] = \infty$.

Definicija 68
Slučajna promenljiva X je **teškog repa** ako postoji neko k takvo da je $\mathbb{E}[|X|^k] = \infty$.

Prva slučajna varijabla sa teškim repom koju smo videli bila je Košijeva (Caushy) raspodela sa gustinom

$$\frac{2}{\tau} \cdot \frac{1}{1+s^2}$$

odakle za $X \sim$ Cauchy,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X|] &= \int_{x\in\mathbb{R}} \frac{2}{\tau} \cdot \frac{|s|}{1+s^2}\, ds \\
&= \int_{x\geq 0} \frac{4}{\tau} \cdot \frac{s}{1+s^2}\, ds \\
&= \frac{2}{\tau} \cdot \ln(1+s^2)|_0^\infty = \infty.
\end{aligned}$$

27.3 Zeta raspodela

Još jedna raspodela sa teškim repom ali većom fleksibilnošću u težini repa je *Zeta* raspodela.

Definicija 69
Kažemo da slučajna promenljiva $X \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ ima **Zeta** ili **Zipf** raspodelu sa parametrom $\alpha > 1$, ako ima gustinu

$$f_X(i) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \cdot \frac{1}{i^\alpha},$$

gde je

$$\zeta(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$$

Rimanova zeta funkcija.

Napomene

- Parametar α mora biti veći od 1, pošto harmonijski red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

divergira, dok je $\zeta(\alpha)$ konačna za $\alpha > 1$ prema integralnom kriterijumu.

- Kada $\alpha \in (1, 2]$ Zeta raspodela nema očekivanje. Kada $\alpha \in (2, 3]$, Zeta raspodela nema varijansu.

Zadaci

27.1 Za $X \sim$ Cauchy, naći
$$\mathbb{P}(X \in [0, 5]).$$

27.2 Za $X \sim$ Cauchy, naći
$$\mathbb{P}(3X + 5 \in [0, 10]).$$

27.3 Oceniti $\zeta(2.5)$ na četiri značajne cifre.

27.4 Pretpostavimo da je $X \sim \text{Zeta}(1.5)$. Naći $\mathbb{P}(X \in [1, 10])$ sumirajući dovoljno veliki broj elemenata.

27.5 Za $X \sim \text{Zeta}(\alpha)$ sa $\alpha > 1$, dokazati da $\ln(X)$ uvek ima konačno očekivanje.

27.6 Neka je $X \sim \text{Zeta}(\alpha)$. Za koje vrednosti α je $\mathbb{E}[X^3]$ konačno?

Glava 28

Uniformna i Bernulijeva kao marginalne raspodele

Pitanje dana Rezervat ima 53 životinje, od kojih su 24 mužjaci a 29 ženke. Pet životinja se biraju ravnomerno nasumično, bez vraćanja, i obeležavaju. Koliki je prosek obeleženih životinja koje su mužjaci?

Sažetak
Razmislite o biranju podskupa od k objekata nasumično bez vraćanja iz skupa od n objekata. Od n objekata, m je označeno na neki način. Neka X označava broj izabranih označenih objekata. Onda X ime **hipergeometrijsku** raspodelu sa parametrima n, m i k. Za $i \in \{0, \ldots, \min(k, m)\}$:

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}}.$$

28.1 Biranje bez vraćanja

Razmotrimo mali primer. Pretpostavimo da su četiri od 12 predmeta u kutiji neispravna. Nasumično i uniformno se biraju dva predmeta. Kolika je šansa da je tačno 1 od izabranih predmeta neispravan?

Ovaj problem je primer *uzorkovanja bez zamene* i povremeno se javlja kod statističkog uzorkovanja iz malih populacija. Ova vrsta problema je retka u praksi, pošto se male populacije obično mogu potpuno testirati, a za velike populacije razlika u verovatnoći između uzorkovanja bez zamene i sa zamenom vrlo brzo postaje veoma mala.

Imajući to u vidu, treba ipak znati da se ova vrsta problema s vremena na vreme javlja, pa je korisno videti kako da ga rešite.

Za gornji primer, brojevi su dovoljno mali da možemo direktno da to izračunamo. Ako biramo dva predmeta, mogući ishodi su DD, DN, ND ili NN, gde N znači da predmet nije neispravan[4], a D znači da jeste neispravan[5].

[4] *eng. not defective*
[5] *eng. defective*

Svaku od ovih verovatnoća možemo izračunati korišćenjem uslovljavanja. Na primer,

$$\mathbb{P}(DD) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}.$$

Prva 4 dolazi od 4 defekta, ali ako je prvo izvlačenje D, to ostavlja samo 3 defekta, što daje 3 u brojiocu drugog razlomka.

Za DN računica ide ovako

$$\mathbb{P}(DN) = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11}$$

a za ND

$$\mathbb{P}(ND) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11}.$$

Imajte na umu da je proizvod imenioca $(12 \cdot 11)$ isti kao i za DD, samo se brojilac menja. Takodje, imajte na umu da je za ND i DN proizvod brojioca $8 \cdot 4$ i $4 \cdot 8$, koji su jednaki jer u množenju nije važan redosled. Uopštenije, za niz NNNDDNN, proizvod brojioca je u potpunosti određen brojem D-ova i N-ova, a ne njihovim redosledom.

Konačno, $\mathbb{P}(\text{NN}) = (8/12)(7/11)$. Dakle, ako je X broj defektnih proizvoda u uzorku od dva,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{12}{132},\ \mathbb{P}(X = 1) = \frac{64}{132},\ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{56}{132}.$$

Verovatnoće su ovde ostavljene kao razlomci da bi se videlo da je njihov zbir 1.

Generalno, kažemo da X ima **hipergeometrijsku** raspodelu.

28.2 Teorija

Da bismo pronašli prosečan broj defektnih u izvlačenju (kao u pitanju dana), pomaže sistematičniji pristup hipergeometrijskim slučajnim promenljivim.

Neka su

$$(U_1, \ldots, U_n) \sim \mathsf{Unif}(A^n).$$

Jedan od naših najranijih rezultata je da su U_i nezavisne slučajne promenljive, svaka sa marginalnom raspodelom $U_i \sim \mathsf{Unif}(A)$. Međutim, moguće je uzorkovati U_i tako da je svaki marginalno uniforman, ali da su slučajne promenljive zavisne.

Uzmimo vektor $(a_1, \ldots, a_n)$. *Permutacija* je preuređivanje elemenata vektora. Na primer, $(3, 4, 1, 2)$ je permutacija od $(1, 2, 3, 4)$.

Za skup veličine n, postoji $n!$ permutacija. Neka $\mathcal{S}_n$ označava skup permutacija vektora $(1, 2, \ldots, n)$. Onda pretpostavimo da biramo uniformno iz skupa raspodela.

Definicija 70
Kažemo da je

$$(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathsf{Unif}(\mathcal{S}_n)$$

izvlačenje bez vraćanja elemenata $\{1, \ldots, n\}$.

Svaka marginalna raspodela biće uniformna.

Činjenica 96
Neka je $(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathsf{Unif}(\mathcal{S}_n)$. Onda za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$, $X_i \sim \mathsf{Unif}(\{1, \ldots, n\})$.

Prisetimo se da X_{-i} označava vektor vrednosti takav da je X_i izbačen, na primer ako je $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (4, 2, 1, 3)$, $X_{-3} = (4, 2, 3)$.

Dokaz. Uzmimo neko $i \in \{1, \ldots, n\}$ i isto tako, neka su $j \in \{1, \ldots, n\}$. Onda je

$$\mathbb{P}(X_i = j) = \frac{\#(\{x \in \mathcal{S}_n | x(i) = j\})}{n!} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(1)}{n!} = \frac{1}{n},$$

tako da je $X_i \sim \mathsf{Unif}(\{1, \ldots, n\})$. □

Naravno X_i nisu nezavisne! Na primer, za $i \neq j$,

$$\mathbb{P}(X_i = X_j = 1) = 0,$$

dok je

$$\mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Sada pretpostavimo da uzmemo X_i i iskoristimo ih da formiramo indikatorske slučajne promenljive. Za neko fiksirano $a \in \{1, \ldots, n\}$, neka je

$$B_i = \mathbb{1}(X_i \leq a).$$

Činjenica 97
Promenljive B_i kreirane na ovakav način imaju marginalne raspodele:

$$B_i \sim \mathsf{Bern}(a/n).$$

Dokaz. Zbog $X_i \sim \mathsf{Unif}(\{1, \ldots, n\})$, $\mathbb{P}(B_i = 1) = a/n$. □

Pošto X_i nisu nezavisne, B_i takođe nisu nezavisne!

Primer 62
Uzmimo $n = 10$ i $a = 6$. Koja je verovatnoća da je $B_1 = B_2 = 1$?

Odgovor Možemo da izaberemo X_1 uniformno od $\{1, 2, \ldots, n\}$. Onda $[X_2 | X_1] \sim \mathsf{Unif}(\{1, \ldots, n\} \setminus \{X_1\}$. Za $B_1 = B_2 = 1$, $X_1 \in \{1, \ldots, a\}$ i $X_2 \in \{1, \ldots, a\} \setminus \{X_1\}$. Šansa da se oba ova događaja dese je

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \boxed{0.3333\ldots}.$$

Evo još jednog načina da se izrazi ista vrsta problema. Ako imam grupu od n objekata, od kojih je njih a označeno na neki način, i izvučemo is tog skupa k objekata uniformno, bez vraćanja, kolika je šansa da tačno i objekata ima tu posebnu oznaku?

Primer 63
Kutija sadrži četrnaest kuglica, deset crvenih i četiri plave. Ako se dve lopte izvuku uniformno, bez vraćanja, kolika je šansa da obe budu crvene?

Odgovor Šansa da je prva loptica crvena je $10/14$. Tada je šansa da je druga lopta crvena, dato da je prva crvena (i sećajući se da izvlačimo bez vraćanja) $(10/14)(9/13) = \boxed{0.4945\ldots}$.

Drugi način da se pristupi ovoj vrsti problema je korišćenje binomnih koeficijenata. Postoji 14 nad 2 načina da odaberemo dve kuglice nasumično bez vraćanja iz skupa od četrnaest kuglica. Koliko podskupova je crveno? Pa, ima 10 crvenih kuglica tako da postoji 10 nad 2 načina da izaberemo dve crvene kuglice koje će činiti naš podskup.

Dakle odgovor je

$$\frac{\binom{10}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2!}}{\frac{14\cdot 13}{2!}} = \boxed{0.4945\ldots}.$$

Dobijamo isti odgovor bez obzira na to kako pristupimo problemu!

Pretpostavimo sada da ne želimo da sve lopte budu iste boje.

Primer 64

Kutija sadrži četrnaest kuglica, deset crvenih i četiri plave. Šest njih se izvlači nasumično bez vraćanja. Neka X označava broj crvenih među njima. Kolika je $\mathbb{P}(X = 3)$?

Rešenje Postoji 14 nad 6 načina da izvučemo šest loptica uniformno nasumično bez vraćanja iz skupa od četrnaest loptica. Na primer, ako su lopte numerisane sa $\{1, \ldots, 14\}$, tada su crvene kuglice $\{1, \ldots, 10\}$ i $\{11, \ldots, 14\}$ plave. Jedan podskup sa tačno tri crvene kuglice je

$$\{2, 7, 9, 11, 12, 13\}.$$

Koliko ima takvih podskupova? Pa, prva tri elementa treba da budu crvene i ima 10 nad 3 načina da se one izaberu. Poslednja tri elementa treba da budu plave i ima 4 nad 3 načina da se one izaberu. Dakle ukupan broj načina je $\binom{10}{3} \cdot \binom{4}{3}$.

To znači da je ukupna verovatnoća jednaka

$$\frac{\binom{10}{3}\binom{4}{3}}{\binom{14}{6}} = \frac{160}{1001} = \boxed{0.1598\ldots}$$

Za $B_1, B_2, \ldots, B_n$ iid $\mathsf{Bern}(p)$, kažemo da

$$B_1 + \cdots + B_k \sim \mathsf{Bin}(k, p).$$

Za naše $B_1, \ldots, B_n$ koje dolaze od izvlačenja bez vraćanja, kažemo da zbir prvih n ovih promenljivih ima *hipergeometrijsku raspodelu*.

Definicija 71

Neka je $(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathsf{Unif}(\mathcal{S}_n)$ i $B_i = \mathbb{1}(X_i \leq a)$. Onda kažemo da

$$N = B_1 + \cdots + B_k$$

ima **hipergeometrijsku raspodelu** sa parametrima n, k, i a.

To pišemo kao $X \sim \mathsf{Hypergeo}(n, k, a)$.

Činjenica 98

Gustina od $X \sim \mathsf{Hypergeo}(n, k, a)$ je

$$f_X(i) = \frac{\binom{a}{i}\binom{n-a}{k-i}}{\binom{n}{k}} \mathbb{1}(i \in \{0, \ldots, \min k, a\}).$$

Napomena Hipergeometrijska raspodela i geometrijska raspodela nemaju nikakve veze jedna sa drugom!

Pošto je hipergeometrijska raspodela zbir k različitih Bernulijevih slučajnih promenljivih, očekivanje hipergeometrijske je jednako k puta očekivanju Bernulijevih slučajnih promenljivih.

Činjenica 99
Za $X \sim \text{Hypergeo}(n, k, a)$,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{ka}{n}.$$

Primer 65
Ova činjenica nam je dovoljna da bi rešili pitanje dana: sa pet životinja izabranih uniformno od 53, gde su 24 mužjaci, očekivani broj mužjaka je $(5 \cdot 24)/(53) \approx \boxed{2.264}$.

Varijansa se izračunava na sličan način, iako ima još posla jer moramo izračunati kovarijanse između parova Bernulijevih slučajnih promenljivih. Prvo, ovo je rezultat.

Činjenica 100
For $X \sim \text{Hypergeo}(n, k, a)$,

$$\mathbb{V}(X) = \frac{km}{n} \cdot \frac{(n-m)(n-k)}{n(n-1)}.$$

Dokaz. Kao i ranije $X = B_1 + \cdots + B_k$. Odatle je

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(B_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{Cov}(B_i, B_j) = k\mathbb{V}(B_1) + k(k-1)\operatorname{Cov}(B_1, B_2).$$

Pošto su B_i Bernulijeve sa parametrom a/n, $\mathbb{V}(B_i) = (m/n)(1 - m/n)$ i

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(B_i, B_j) &= \mathbb{E}[B_i B_j] - \mathbb{E}[B_i]\mathbb{E}[B_j] = \mathbb{P}(B_i = B_j = 1) - (a/n)^2 \\
&= \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} - \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \\
&= -\frac{a}{n}\left[\frac{n-a}{n(n-1)}\right].
\end{aligned}$$

Onda je

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= k\frac{a}{n}\left[1 - \frac{a}{n}\right] - k(k-1)\frac{a}{n}\left[\frac{n-a}{n(n-1)}\right] \\
&= \frac{ka}{n}\left[1 - \frac{a}{n} - \frac{n-a}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}\right] \\
&= \frac{ka}{n}\left[\frac{n(n-1) - a(n-1) - (n-a)(k-1)}{n(n-1)}\right] \\
&= \frac{ka}{n}\left[\frac{(n-a)((n-1) - (k-1))}{n(n-1)}\right] \\
&= \frac{ka}{n}\left[\frac{(n-a)(n-k)}{n(n-1)}\right].
\end{aligned}$$

□

Primetite da „bez vraćanja” čini varijansu nešto manjom nego što je slučaj u binomnoj, gde je „sa vraćanjem”.

Zadaci

28.1 Mala plastična kantica sadrži pločice sa slovima MISSISSIPI. Četiri od ovih pločica su izvučene iz kantice bez vraćanja.

a) Kolika je šansa da su sve četiri S pločice izvučene?

b) Kolika je šansa da su tačno dve od četiri izvučene pločice sa slovom S?

28.2 Tegla sadrži pet plavih i deset zelenih klikera. Sedam klikera je izvučeno iz tegle, kolika je šansa da su tačno 3 plava?

28.3 Svakog dana fabrika proizvede 500 šrafova od kojih su 10 lošeg kvaliteta.

a) Ako se od 500 šrafova izvlači 5 njih na slučajan način, koja je verovatnoća da u tom uzorku nema nijednog lošeg kvaliteta?

b) Koji je očekivani broj šrafova lošeg kvaliteta u ovom uzorku veličine 5?

28.4 Nadovezujući se na prethodni zadatak, koliko šrafova treba da bude u uzorku da bi u proseku broj loših šrafova u tom uzorku bio 1?

28.5 U jednom ekosistemu živi 1500 ptica određene vrste. Uzorkovano je 20 od tih ptica i kod 5 je nađen određeni gen. Od 1500, koliko ptica treba da ima ovaj gen da bi očekivani broj u uzorku bio 5? (Ova vrsta ocene se zove *ocena metodom momenata*)

28.6 Iz skupa od 316 studenata, od kojih njih 160 ima 20 ili više godina i 156 njih koji su mlađi od 20 godina, bira se 48 studenata uniformno nasumično da popune anketu.

a) Koliki je očekivani broj studenata koji popunjavaju anketu koji imaju 20 godina ili više?

b) Kolika je standardna devijacija očekivanog broja studenata koji popunjavaju anketu koji imaju 20 godina ili više?

Glava 29

Multinomna raspodela

Pitanje dana Pretpostavimo da se u anketi stanovnici pitaju da li su nezadovoljni, zadovoljni, ili veoma zadovoljni telefonskom uslugom. Ako je svaki stanovnik samostalno nezadovoljan sa verovatnoćom 20%, zadovoljan sa verovatnoćom 70%, i veoma zadovoljan sa verovatnoćom 10%, kakva je korelacija između broja nezadovoljnih i veoma zadovoljnih učesnika?

Sažetak **Multinomna raspodela** proizilazi iz ispitivanja gde postoje dva ili više mogućih odgovora. Ako svaki od n pokušaja ima ishode $\{1, \ldots, k\}$, i oni su iid, onda $(X_1, \ldots, X_k) \sim \mathsf{Multinom}(n, p_1, \ldots, p_k)$, gde je p_i verovatnoća da bilo koji pokušaj ima ishod i.
Za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$, $X_i \sim \mathsf{Bin}(n, p_i)$, i $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$.

Prilikom formiranja binomne raspodele, razmatrali smo Bernulijeve eksperimente koji su imali jedan od dva ishoda, uspeh ili neuspeh, 1 ili 0.

Šta ako postoji više od dva izbora? Možda postoje tri izbora za svaki pokušaj. U ovom slučaju, mogli bismo da prebrojimo broj pokušaja u kojima se desio izbor 1, gde se desio izbor 2, a gde se desio izbor 3.

Primera radi, uzmimo anketu sa 100 ljudi. Rezultati ankete su slučajne promenljive (X_1, X_2, X_3), gde je X_1 broj onih ispod 18 godina, X_2 broj onih između 18 i 25, i X_3 broj onih preko 25. Pretpostavimo da je verovatnoća da je izabrana osoba mlađa od 18 jednaka 0.2, za 18 do 25 jednaka 0.5, i da je preko 25 jednaka 0.3. Onda je

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \mathsf{Bin}(100, 0.2) \\ X_2 &\sim \mathsf{Bin}(100, 0.5) \\ X_3 &\sim \mathsf{Bin}(100, 0.3), \end{aligned}$$

uz uslov da je $X_1 + X_2 + X_3 = 100$. Generalno, imamo sledeće.

Definicija 72
Kažemo da $(X_1, \ldots, X_k)$ ima **multinomnu raspodelu sa parametrima** $n, p_1, \ldots, p_k$ (pišemo $(X_1, \ldots, X_k) \sim \mathsf{Multinom}(n, p_1, \ldots, p_k)$) ako su p_i nenegativni parametri sa $p_1 + \cdots + p_k = 1$ i za sve i, $X_i \sim \mathsf{Bin}(n, p_i)$ i $X_1 + \cdots + X_k = n$.

Prisetimo se da ako su $B_i \sim \mathsf{Bern}(p)$ nezavisne za $i \in \{1, \ldots, n\}$, onda je

$$X = B_1 + \cdots + B_n \sim \mathsf{Bin}(n, p).$$

Ista ideja može da se proširi i na slučaj multinomnih.

Činjenica 101
Neka je W diskretna slučajna promenljiva takva da je $\mathbb{P}(W = i) = p_i$ gde je $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Onda za $W_1, \ldots, W_n \sim W$ iid, i $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}(W_j = i).$$

Tada je $(X_1, \ldots, X_k) \sim \mathsf{Multinom}(n, p_1, \ldots, p_k)$.

Dokaz. Pošto je svaka X_i zbir n nezavisnih indikatora koje uzimaju vrednost 1 sa verovatnoćom p_i. $X_i \sim \mathsf{Bin}(n, p_i)$. Takođe,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}(W_j = i) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}(W_j = i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}(W_j = 1) + \mathbb{1}(W_j = 2) + \cdots + \mathbb{1}(W_j = k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 1 = n.
\end{aligned}$$

□

Konkretno, ova činjenica implicira da ako je $X \sim \mathsf{Bin}(n, p)$, onda $(X, n - X) \sim \mathsf{Multinom}(n, p, 1 - p)$.

Gustina multinomnih

Gustina multinomnih $(X_1, \ldots, X_n)$ može da se zapiše. Ova gustina zahteva funkciju *višestrukog izbora* .

Definicija 73
Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_k$ skup simbola. Broj načina da se rasporede simboli i_1 a_1, i_2 a_2, i tako dalje do i_k a_k jedan za drugim, određen je funkcijom **višestrukog izbora**, takođe poznatom kao **multinomlni koeficijent**, zapisan kao

$$\binom{i_1 + \cdots + i_n}{i_1, i_2, \ldots, i_n}.$$

Formula za računanje izraza višestrukog izbora slična je onoj za binomni koeficijent.

Činjenica 102
Za nenegativne cele brojeve $i_1, \ldots, i_k$,

$$\binom{i_1 + \cdots + i_n}{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \frac{(i_1 + \cdots + i_n)!}{i_1! i_2! \cdots i_n!}$$

Primer 66
Na koliko načina mogu da se poređaju u red 4 a, 5 b i 3 c?

Odgovor Ima $4+5+3=12$ simbola, tako da je to

$$\binom{12}{4,5,3} = \frac{12!}{4!5!3!} = 27720.$$

Primer 67
Za $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{Multinom}(12, 0.2, 0.5, 0.3)$, koliko je $\mathbb{P}(X_1 = 4, X_2 = 5, X_3 = 3)$?

Rešenje Pretpostavimo da je ishod pojedinačnog eksperimenta a sa verovatnoćom 0.2, b sa verovatnoćom 0.5, i c sa verovatnoćom 0.3. Zatim jedan određeni ishod sa 4 a, 5 b-a, i 3 c-a je $caaabccbabbb$. Verovatnoća ovog ishoda je

$$(0.3)(0.2)(0.2)(0.2)(0.5)(0.3)(0.3)(0.5)(0.2)(0.5)(0.5)(0.5) = (0.2)^4(0.5)^5(0.3)^3.$$

Zbog komutativnosti množenja, ovo će biti verovatnoća za bilo koji ishod sa 4 a, 5 b-a, i 3 c-a. Dakle, ukupna verovatnoća je

$$(0.2)^4(0.5)^5(0.3)^3.$$

$$\binom{12}{4,5,3}(0.2)^4(0.5)^5(0.3)^3 = \boxed{0.03742\ldots}.$$

Poslednji primer se može generalizovati kako bi se dobila gustina za proizvoljne multinomne.

Činjenica 103
Za $(X_1, \ldots, X_k) \sim \text{Multinom}(n, p_1, \ldots, p_k)$ važi

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(i_1, \ldots, i_n) = \binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_k} p_1^{i_1} \cdots p_n^{i_n} \cdot \mathbb{1}(i_1, \ldots, i_k \in \{0, \ldots, n\}) \cdot \mathbb{1}(i_1 + \cdots + i_k = n).$$

29.1 Kovarijansa

Kovarijansa između različitih komponenata multinomnih direktno proizilazi iz indikatorske reprezentacije. Ona je negativna jer kada je jedna komponenta veća, sve druge komponente su u proseku manje.

Činjenica 104
Za $(X_1, \ldots, X_k) \sim \text{Multinom}(n, p_1, \ldots, p_k)$, za sve $i \neq j$, važi $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j$.

Dokaz. Neka je $i \neq j$. Onda je kovarijansa između X_i i X_j jednaka

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}[X_iX_j] - (np_i)(np_j),$$

Prisetimo se da za indikatorske funkcije važi $\mathbb{1}(A)\mathbb{1}(B) = \mathbb{1}(AB)$. Takođe, $X_i = \sum_k \mathbb{1}(W_k = i)$ $X_j = \sum_\ell \mathbb{1}(W_\ell = j)$, tako da je

$$X_i X_j = \sum_k \sum_\ell \mathbb{1}(W_k = i, W_\ell = j),$$

što znači da je

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \sum_k \sum_\ell \mathbb{P}(W_k = i, W_\ell = j).$$

Bilo bi lepo da su sve verovatnoće $p_i p_j$. Ako bi to bilo tačno, tada bi dvostruka suma iznosila $n^2 p_i p_j$. Nažalost, ove verovatnoće imaju ovu vrednost samo kada je $k \neq \ell$. Kada je $k = \ell$, verovatnoća je nula. Pošto se $k = \ell$ javlja tačno n puta u dvostrukom zbiru, broj izraza gde važi $\mathbb{P}(W_k = i, W_\ell = j) = p_i p_j$ je $n^2 - n$, dok su ostali izrazi nula. Stoga,

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = (n^2 - n) p_i p_j.$$

Što čini

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = (n^2 - n) p_i p_j - n^2 p_i p_j = -n p_i p_j.$$

□

Zadaci

29.1 Neka su $(W_1, W_2, W_3, W_4) \sim \mathsf{Multinom}(10, 0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$. Koliko je

$$\mathbb{P}((W_1, W_2, W_3, W_4) = (1, 3, 2, 4))?$$

29.2 Petnaest osoba je dobilo pitanje sa pet odgovora. Ako se verovatnoća za svaki od pet odgovora modeluje kao $0.2, 0.2, 0.1, 0.25, 0.25$, tada koja je šansa da ukupni brojevi odgovora budu $4, 3, 1, 5, 2$?

29.3 Pretpostavimo $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathsf{Multinom}(30, 0.5, 0.1, 0.4)$.

a) Koja je raspodela za X_1?
b) Koliko je $\mathbb{E}[X_1]$?
c) Naći $\mathrm{Cov}(X_1, X_3)$.

29.4 Uzmimo $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \sim \mathsf{Multinom}(100, 0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$.

a) Koja je raspodela od Y_3?
b) Naći $\mathrm{Cov}(Y_3, Y_4)$.
c) Naći $\mathrm{Cov}(Y_3, Y_3)$.

29.5 Predmet istraživanja je jedna životinjska populacija. Uzeto je 30 životinja. Svaka životinja ima 10% šanse da je genotipa A, 20% šanse da je genotipa B i 70% šanse da je genotipa C. Neka je (N_A, N_B, N_C) broj životinja svakog od tri genotipa.

a) Koja raspodelu ima (N_A, N_B, N_C)?

b) Naći $\mathbb{E}(N_A)$.

c) Kolika je $\mathrm{Cov}(N_A, N_B)$?

d) Kolika je $\mathrm{Cov}(N_A, N_C)$?

29.6 Psihološki eksperiment proučava efekte pozitivnih poruka na san. Pretpostavimo da anketiraju 73 učenika. Model predviđa da će 25% spavati dobro, 55% spavati umereno dobro, a 20% spavati loše. Beleži se broj učenika za svaki od tri odgovora kao (N_1, N_2, N_3). Odgovoriti na sledeće.

a) Koja raspodelu ima (N_1, N_2, N_3)?

b) Naći $\mathbb{E}(N_3)$.

c) Kolika je $\mathrm{Cov}(N_1, N_3)$?

d) Kolika je $\mathrm{Cor}(N_1, N_3)$?

Glava 30

Multinormalne slučajne promenljive

Pitanje dana Pretpostavimo da je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Neka je $Z = (Z_1, Z_2)$, gde su Z_i iid standardne normalne slučajne promenljive. Za $W = AZ$:

1. Koja je raspodela od $W = (W_1, W_2)$?
2. Naći $\mathrm{Cor}(W_1, W_2)$.

Sažetak Za $Z_1, \ldots, Z_n$ iid standardne normalne slučajne promenljive, $\mu \in \mathbb{R}^n$, A jedna matrica n puta n, i $W = AZ$. Onda W ima **multivarijantnu normalnu** ili **multinormalnu** raspodelu. To pišemo $W \sim \text{Multinorm}(\mu, AA^T)$.
Zovemo $\Sigma = AA^T$ **matrica kovarijacije**, i $\Sigma(i,j) = \mathrm{Cov}(W_i, W_j)$. Gustina od W je

$$f_W(w) = \tau^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(w-\mu)^T \Sigma^{-1}(w-\mu)\right)$$

Neka su $Z_1, \ldots, Z_n$ iid standardne normalne slučajne promenljive. Pošto su Z_i nezavisne, poznavanje jedne od njih ne utiče na znanje o drugim.

Ovo čini proračun lakim, ali je loše za modeliranje stvarnih podataka, gde često poznavanje jednog faktora menja distribuciju drugog.

Na primer, za dve tehnološke akcije, ako je jedna veća od proseka, druga bi takođe mogla biti veća. Rodna težina medveda može biti u pozitivnoj korelaciji sa dostupnom ishranom. Vreme provedeno gledajući TV može biti u negativnoj korelaciji sa stopom kriminala i tako dalje.

Stoga je korisno imati raspodelu gde svaka komponenta ima marginalnu raspodelu koja je normalna, ali dozvoljavamo pozitivnu ili negativnu korelaciju između različitih komponenti.

Radi jednostavnosti, počnimo sa dve standardne iid normalne slučajne promenljive, Z_1 i Z_2. Jedno od naših pravila za slučajne promenljive je da je zbir nezavisnih normalnih slučajnih promenljivih takođe normalna slučajna promenljiva. Parametri (srednja vrednost i varijansa) su samo zbir parametara za originalne slučajne promenljive. Primenjujući ta pravila dobijamo, na primer

$$
\begin{aligned}
Z_1 + Z_2 &\sim \mathsf{N}(0, 2) \\
Z_1 - 2Z_2 &\sim \mathsf{N}(0, 5),
\end{aligned}
$$

gde $-2Z_2$ ima varijansu $(-2)^2$ a Z_1 ima varijansu 1 što daje ukupan zbir 5.

Možemo da napišemo ove jednačine koristeći matrice:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}
$$

ili jednostavnije

$$
AZ = W,
$$

gde je $A(1,1) = 1$, $A(1,2) = 1$, $A(2,1) = 1$, $A(2,2) = -2$.

Pogledajmo kovarijansu između W_1 i W_2.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(W_1, W_2) &= \operatorname{Cov}(A(1,1)Z_1 + A(1,2)Z_2, A(2,1)Z_1 + A(2,2)Z_2) \\
&= A(1,1)A(2,1)\operatorname{Cov}(Z_1, Z_1) + A(1,1)A(2,2)\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) \\
&\qquad + A(1,2)A(2,1)\operatorname{Cov}(Z_2, Z_1) + A(1,2)A(2,2)\operatorname{Cov}(Z_2, Z_2) \\
&= A(1,1)A(2,1) + A(1,2)A(2,2).
\end{aligned}
$$

Skraćenje na kraju dolazi iz $\operatorname{Cov}(Z_i, Z_i) = \mathbb{V}(Z_i) = 1$ i $\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = 0$ pošto su Z_1 i Z_2 nezavisne. Ovaj poslednji rezultat ima specijalnu formu. $A(1,1)A(2,1) + A(1,2)A(2,2)$ je skalarni proizvod[6] prve vrste od A i druge kolone od A.

Ova ideja može biti generalizovana na $Z_1, \ldots, Z_n$ iid standardne normalne, i

$$
AZ = W,
$$

gde je A matrica n puta n i W ije n-dimenzioni vektor. Onda na sličan način kao gore, dobijamo da je

$$
\operatorname{Cov}(W_i, W_j) = r_i \cdot c_j,
$$

gde je r_i i-ta vrsta matrice A a c_j j-ta kolona matrice A.

Često kombinujemo kovarijanse u matricu gde je element na poziciji (i, j) jednak $\operatorname{Cov}(V_i, V_j)$. Pošto se standardna devijacija obično označava malim grčkim slovom sigma, σ, ova matrica kovarijanse se obično označava velikim grčkim slovom sigma, Σ.

Iz onoga što smo ranije računali, znamo da je

$$
\Sigma = AA^T.
$$

Ovde je A^T *transponovana* matrica, gde su vrste i kolone zamenjene. Na primer,

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.
$$

Kada imamo kovarijanse, možemo dodati konstantu da promenimo očekivanje slučajnih promenljivih.

[6] *unutrašnji ili tačkasti proizvod; eng. dot product*

Definicija 74
Neka su $Z_1, \dots, Z_n$ be iid standardne normalne slučajne promenljive . Za realnu matricu A dimenzije n puta n i $\mu \in \mathbb{R}^n$, kažemo da

$$W = AZ + \mu$$

ima **multivarijantnu normalnu** ili **multinormalnu** raspodelu sa očekivanjem μ i kovajrijansom $\Sigma = AA^T$. To pišemo

$$W \sim \mathsf{Multinorm}(\mu, \Sigma).$$

Tada je ključna činjenica o multinormalnim sledeća.

Činjenica 105
Za $W \sim \mathsf{Multinorm}(\mu, \Sigma)$, $\mathbb{E}[W] = \mu$, i za $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $\mathrm{Cov}(W_i, W_j) = \Sigma(i, j)$.

Primer 68
Pitanje dana. Pretpostavimo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Neka je $Z = (Z_1, Z_2)$, gde su Z_i iid standardne normalne slučajne promenljive. Za $W = AZ$:

1. Koja je raspodela od $W = (W_1, W_2)$?

2. Naći $\mathrm{Cor}(W_1, W_2)$.

Odgovor Pošto je V matrica puta vektor iid standardnih normalnih slučajnih promenljivih, imaće multivarijantnu normalnu raspodelu. Prvi parametar (vektor očekivanja) je nula vektor. Drugi parametar (matrica kovarijanse) je

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ove informacije možemo iskoristiti za rešavanje problema.

1. $\boxed{W \sim \mathsf{Multinorm}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\right)}.$

2. $$\begin{aligned} \mathrm{Cor}(W_1, W_2) &= \frac{\mathrm{Cov}(W_1, W_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(W_1)\mathbb{V}(W_2)}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \boxed{-0.7071\dots}. \end{aligned}$$

Primetimo da to znači da varijanse pojedinačnih komponenti leže na dijagonali.

Primer 69
Neka je (W_1, W_2, W_3) multivarijantna normalna sa očekivanjem $(1.2, -2, 3.4)$ i matricom kovarijanse

$$\begin{pmatrix} 6.97 & -0.64 & -3.52 \\ -0.64 & 6.8 & -1.52 \\ -3.52 & -1.52 & 14.24 \end{pmatrix}$$

Koju raspodelu ima W_2?

Rešenje Sve marginalne raspodele za multivarijantnu normalu su same po sebi normalne. Varijansa za V_2 je $(2, 2)$-ti unos matrice kovarijanse. Otuda $\boxed{V_2 \sim \mathsf{N}(-2, 4.6)}$.

Često nam se ne da matrica A. Umesto toga, data nam je samo matrica kovarijanse Σ. Ova matrica kovarijanse će uvek imati osobinu iz linearne algebre koja se zove *pozitivna definitnost*. Uvek je moguće otkriti iz takve pozitivno definitne matrice šta je matrica A tako da je $\Sigma = AA^T$. Ovo se zove *dekompozicija Holeskog*[7] za Σ.

Podsetimo se da je za standardnu normalnu slučajnu promenljivu gustina

$$f_Z(z) = \tau^{-1/2} \exp(-z^2/2).$$

Kada uzmemo $X = \mu + \sigma Z$, dobijemo gustinu

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \tau^{-1/2}\sigma^{-1} \exp(-(1/2)((x-\mu)/\sigma)^2) \\ &= \tau^{-1/2}\sigma^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}((x-\mu)\sigma^{-2}(x-\mu)\right). \end{aligned}$$

Sličan rezultat važi i za multivarijantnu normalnu.

Činjenica 106
Za $W = (W_1, \ldots, W_n) \sim \mathsf{Multinorm}(\mu, \Sigma)$ i $w = (w_1, \ldots, w_n)$, W ima zajedničku gustinu

$$f_W(w) = \tau^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(w-\mu)^T \Sigma^{-1}(w-\mu)\right).$$

Zadaci

30.1 Neka su Z_1, Z_2, Z_3 iid normalne.

a) Koju raspodelu ima $Z_1 + Z_2 + Z_3$?
b) Koju raspodelu ima $5 - Z_1 + 2Z_2 + 4Z_3$?

30.2 Neka su Z_1, Z_2 iid normalne.

a) Koju raspodelu ima $Z_1 + Z_2$?
b) Koju raspodelu ima $Z_1 - Z_2$?

[7] *eng. Cholesky decomposition*

c) Koju raspodelu ima $4Z_1 - 2Z_2$?

30.3 Za Z_1, Z_2, Z_3 iid normalne neka su

$$\begin{aligned} W_1 &= Z_1 + Z_2 - 2Z_3 \\ W_2 &= -Z_1 + Z_3 \\ W_3 &= Z_3. \end{aligned}$$

a) Naći $\mathrm{Cov}(W_1, W_3)$.

b) Koju raspodelu ima(W_1, W_2, W_3)?

30.4 Neka su Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 iid standardne normalne slučajne promenljive. Neka je $W_1 = Z_1 + Z_2 + 2Z_3 - Z_4, W_2 = Z_2 - Z_3 + 4Z_4$.

a) Naći $\mathbb{V}(W_1)$.

b) Naći $\mathrm{Cov}(W_1, W_2)$.

30.5 Neka je (X_1, X_2, X_3) multinormalni vektor sa očekivanjem $(2.3, 1.8, -1.6)$ i matricom kovarijanse

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 2.3 \\ 0 & 2.4 & 1.6 \\ 2.3 & 1.6 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

a) Koju raspodelu ima X_1?

b) Naći $\mathrm{Cov}(X_1, X_3)$.

30.6 Neka je (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) multinormalni vektor sa očekivanjem $(0, 0, 0, 0)$ i matricom kovarijanse

$$\begin{pmatrix} 4.3 & 6.2 & -2.3 & 2.6 \\ 6.2 & 3.4 & -1.7 & 10.5 \\ -2.3 & -1.7 & 1.0 & 4.7 \\ 2.6 & 10.5 & 4.7 & 4.2 \end{pmatrix}$$

a) Koju raspodelu ima Y_2?

b) Kolika je $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_4)$?

Glava 31

Statistike poretka

Pitanje dana Neka su U_1, U_2, U_3, U_4 iid uniformne slučajne promenljive na intervalu $[0, 1]$. Koja je gustina drugog najmanjeg broja od ta četiri?

Sažetak **Statistike poretka** slučajnih promenljivih $(X_1, \ldots, X_n)$ je vektor $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ takav da postoji permutacija $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ tako da $X_{(i)} = X_{f(i)}$, i

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

Pretpostavimo da su $X_1, \ldots, X_n$ iid sa istom raspodelom kao X. Ako X ima gustinu f_X u odnosu na Lebegovu meru, i cdf F_X, onda je gustina i-te statistike poretka data sa

$$f_{X_{(i)}}(s) = n\binom{n-1}{i-1} F_X(s)^{i-1} f_X(s)(1 - F_X(s))^{n-i}.$$

Statistike poretka[8] vektora imaju iste vrednosti kao i sam vektor ali poređane od najmanje do najveće. Na primer, ako je vektor jednak

$$(3.1, 2.8, 1.7, 8.1, -1.2, 2.8, 3.6),$$

onda bi statistike poretka bile

$$(-1.2, 1.7, 2.8, 2.8, 3.1, 3.6, 8.1).$$

Ako bismo originalne komponente vektora označili pomoću indeksa

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

onda koristimo indekse okružene zagradama da naznačimo da su to statistike poretka. Dakle, notacija za statistike poretka bi bila

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}).$$

U pitanju dana, (U_1, U_2, U_3, U_4) su slučajne promenljive, tako da su statistike poretka

$$(U_{(1)}, U_{(2)}, U_{(3)}, U_{(4)})$$

[8] *eng. Order statistics*

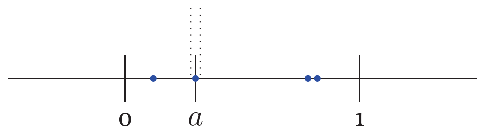
takođe slučajne promenljive.

Pitanje dana postavlja pitanje o drugom najmanjem broju, koji bi bio $U_{(2)}$ koristeći notaciju statistike poretka.

Pogledajmo $\mathbb{P}(U_{(2)} \in da)$. To znači da je bar jedna uniforma blizu a, dok je tačno jedna uniforma ispod a, a još 2 uniformne su iznad a. Za jednu uniformnu U, $\mathbb{P}(U \in da) = \mathbb{1}(a \in [0,1])\, da$. Otuda, za $a \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(U_{(2)} \in da) = (5)(\mathbb{1}(a \in [0,1])\, da)\binom{4}{1}(a)(1-a)^2 = 20a(1-a)^2\mathbb{1}(a \in [0,1])\, da.$$

Ovde je 5 broj izbora među uniformnim za odabir one koja će biti blizu a, da je verovatnoća da je uniformna koja je izabrana zapravo unutar intervala širine da koji okružuje a. Faktor $\binom{4}{1}$ je broj načina da se izabere koja od četiri preostale uniformne je ispod a, a a je šansa da je ta uniformna zapravo ispod a. Konačno, $(1-a)^2$ je verovatnoća da su preostale dve uniformne iznad a.



Ovo je *Beta* raspodela sa parametrima 2 i 3. To pišemo $U_{(2)} \sim \text{Beta}(2,3)$.

Uopšteno govoreći, važi sledeća činjenica.

Činjenica 107
Neka su $U_1, \ldots, U_n$ iid $\text{Unif}([0,1])$. Onda

$$U_{(i)} \sim \text{Beta}(i, n-i+1).$$

31.1 Formula za gustinu statistike poretka

Za neprekidne slučajne promenljive, ovaj isti argument se može generalizovati da bi se dobio sledeći metod za izračunavanje gustine statistike poretka .

Činjenica 108
Za $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne sa istom raspodelom kao X koja ima gustinu f_X u odnosu na Lebegovu meru, neka je F_X cdf od X. Onda i-ta statistika poretka ima sledeću gustinu

$$f_{X_{(i)}}(s) = n\binom{n-1}{i-1}F_X(s)^{i-1}f_X(s)(1-F_X(s))^{n-i}$$

u odnosu na Lebegovu meru.

Dokaz. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ iid sa cdf F_X, i neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Onda za i-tu statistiku poretka da bi bila manja od a, bar i vrednosti među X_j moraju biti najviše a. Tako je

$$\mathbb{P}(X_{(i)} \le a) = \sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}F_X(a)^j(1-F_X(a))^{n-j}.$$

Diferenciranje daje

$$f_{X_{(i)}}(a) = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}[jF_x(a)^{j-1}f_X(a)(1-F_X(a))^{n-j} - (n-j)F_X(a)^j(1-F_X(a))^{n-j}f_X(a)]$$

Pogledajmo sada

$$f(n,j) = j\binom{n}{j}F_X(a)^{j-1}F_X(a)^{n-j} = n\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!}F_X(a)^{j-1}F_X(a)^{n-j},$$

i

$$\begin{aligned}(n-j)\binom{n}{j}F_X(a)^j(1-F_X(a))^{n-j-1} &= n\frac{n!(n-j)}{j!(n-j)!}F_X(a)^j(1-F_X(a))^{n-j-1}\\ &= n\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!}F_X(a)^j(1-F_X(a))^{n-j-1}\\ &= f(n,j+1).\end{aligned}$$

Tako da je zbir po j od i do n

$$[f(n,i)-f(n,i+1)]+[f(n,i+1)-f(n,i+2)]+\cdots+[f(n,n)-f(n,n+1)]$$

što je teleskopska suma. Kada je $j=n$, $n-j=0$, tako da je zadnji član $f(n,n+1)=0$, i od sume ostaje samo $f(n,j)$. Otuda je

$$\begin{aligned}f_{X_{(i)}}(a) &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}[jF_x(a)^{j-1}f_X(a)(1-F_X(a))^{n-j}-(n-j)F_X(a)^j(1-F_X(a))^{n-j}f_X(a)]\\ &= f(n,i)f_X(a)\\ &= n\binom{n-1}{j-1}F_X(a)^i f_X(a)(1-F_X(a)^{n-i}.\end{aligned}$$

□

Zadaci

31.1 Neka su X_1, X_2, X_3 iid sa gustinom $f(s) = s/2 \cdot \mathbb{1}(s \in [0,2])$.

a) Koja je gustina od $X_{(1)}$?

b) Izračunaj $\mathbb{E}[X_{(2)}]$?

31.2 Neka su T_1, T_2, T_3 iid $\mathsf{Exp}(3)$. Naći gustinu od $T_{(2)}$?

31.3 Dato je $\mathbb{P}(X=0)=0.3$, $\mathbb{P}(X=1)=0.5$, i $\mathbb{P}(X=2)=0.2$. Neka su X_1, X_2, X_3 iid sa istom raspodelom kao X.

a) Koja je raspodela od $X_{(1)}$?

b) Naći $\mathbb{E}[X_{(2)}]$?

31.4 Neka X ima gustinu

$$f_X(i) = 0.2\mathbb{1}(X=1)+0.7\mathbb{1}(X=9)+0.1\mathbb{1}(X=13).$$

Neka su X_1, X_2, X_3 iid kao X. Skicirati kumulativnu f-ju raspodele za $X_{(2)}$.

31.5 Kolika je šansa da za tri iid uniformne na intervalu $[0,1]$, srednji od tri broja pada u interval $[1/3, 2/3]$?

31.6 Kolika je šansa da je za jedanaest iid uniformnih nad $[0,2]$ srednji broj između 0.9 i 1.1?

Glava 32

Merljive funkcije i slučajne promenljive

Pitanje dana Mogu li slučajne promenljive biti predstavljene kao funkcije?

Sažetak Za merljive prostore $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, funkcija $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ je **merljiva** ako za svakol $A \in \mathcal{F}_2$, skup $\{a \in \Omega_1 : X(a) \in A\} \in \mathcal{F}_1$. Ako merljivi prostor $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ima još i raspodelu verovatnoće $\mathbb{P}_1$, onda X indukuje drugu raspodelu verovatnoće na Ω_2 zvanu **raspodela od X**, i X se zove **slučajna promenljiva**.

Slučajna promenljiva je predstavljala broj o kome imamo delimične informacije. To je suština slučajne promenljive, ali nije od velike pomoći kada su u pitanju rigorozni dokazi. Dakle, matematičari su razvili drugi pogled na slučajne promenljive, a to je da su one funkcije. Pošto se funkcije mogu definisati u terminima skupova, ovo svodi verovatnoću na teoriju skupova, koja je bila popularan oblik matematičkih osnova u prvoj polovini dvadesetog veka.

Da se objasni ovaj proces, počnimo sa merljivim prostorom. Zapamtite da je to skup kao što je Ω_1, zajedno s akolekcijom podskupova od Ω_1 koja formira σ-algebru. Nazovimo σ-algebru $\mathcal{F}_1$. Zvaćemo $\mathcal{F}_1$ *merljivim* skupovima. Pošto Ω_1 poseduje merljive skupove, sada možemo kreirati raspodelu verovatnoće $\mathbb{P}_1 : \mathcal{F}_1 \to [0, 1]$.

Sledeće, pretpostavimo da imamo drugi skup Ω_2 sa svojim sopstvenim merljivim skupovima $\mathcal{F}_2$. Konačno, pretpostavimo da imamo funkciju $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ koja uzima elemente iz Ω_1 i slika ih u elemente iz Ω_2.

Znači vrednosti $X(a)$ uvek leže u Ω_2. Neka je $A \subseteq \Omega_2$. Onda je događaj tipa $\{X \in A\}$ matematička skraćenica za sledeće:

$$\{X \in A\} = \{a \in \Omega_1 : X(a) \in A\}.$$

(Skup $\{X \in A\}$ je takođe poznat kao *inverzna slika skupa A funkcije X*.)

Da bi ovaj događaj $\{X \in A\}$ nešto značio, želimo da ovaj novi događaj bude merljiv u $\mathcal{F}_1$. To je motivacija iza sledeće definicije.

Definicija 75
Neka su $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ par merljivih prostora. Neka $X : \Omega_1 \to \Omega_2$. Onda je X **merljiva funkcija** ako

$$(\forall A \in \mathcal{F}_2)(\{a : X(a) \in A\} \in \mathcal{F}_1).$$

Ovo je ekvivalentno tome da kažemo da za sve merljive događaje A u $\mathcal{F}_2$, želimo da inverzna slika $\{X \in A\}$ bude merljiva u $\mathcal{F}_1$.

Primer 70
Uzmimo $\Omega_1 = [0, 1]$, $\Omega_2 = \{3, 4\}$, i $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$.
Razmotrimo funkciju

$$X = 3 + \mathbb{1}(a \leq 0.3).$$

Koje događaje mora da sadrži $\mathcal{F}_1$ da bi X bila merljiva funkcija?

Rešenje Inverzne slike merljivih događaja u $\mathcal{F}_2$ daju

$$\{X = 4\} = \{X \in \{4\}\} = \{a : X(a) \in \{4\}\} = [0, 0.3].$$

Slično

$$\{X = 3\} = (0.3, 1], \quad \{X \in \emptyset\} = \emptyset, \quad \{X \in \{3, 4\}\} = [0, 1].$$

Tako je X merljiva funkcija ako i samo ako

$$\{\emptyset, [0, 0.3], (0.3, 1], [0, 1]\} \subseteq \mathcal{F}_1.$$

Dakle, u ovom trenutku, ako je A merljivo u Ω_2, onda je $\{X \in A\}$ merljivo u Ω_1. Pretpostavimo sada da imamo meru verovatnoće nad Ω_1. Tada se $\{X \in A\}$ može dodeliti verovatnoća. Ta verovatnoća je naravno *raspodela* od X

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Definicija 76
Ako je $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ merljiva funkcija i $\mathbb{P}$ mera verovatnoće nad Ω_1, onda je $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ mera verovatnoće nad Ω_2, i X je jedna **slučajna promenljiva**.

Zapamtite da kao i sve takve definicije, i ova nam pomaže da dokažemo teoreme i činjenice, ali ne pomaže u našoj intuiciji. Intuicija ostaje ista kao pre: svaka razumna funkcija uniformne slučajne promenljive je jedna slučajna promenljiva.

Zadaci

32.1 Uzmimo $\Omega_1 = [0, 1]$ i $\Omega_2 = \{1, 2, 3\}$. Neka je funkcija $Y : \Omega_1 \to \Omega_2$ definisana sa

$$Y(y) = 1 + \mathbb{1}(y \in [0.4, 0.6]) + \mathbb{1}(y \in [0.5, 0.7]).$$

Naći $Y^{-1}(\{2\})$.

32.2 Neka je $\Omega_3 = [-1, 1]$ i $\Omega_4 = [0, 5]$. Za $X : \Omega_3 \to \Omega_4$ definisano kao

$$X(x) = x^2,$$

naći $X^{-1}([0.5, 1.5])$.

32.3 Uzmimo $\Omega_1 = [0,1]$, $\Omega_2 = \{1,2,3\}$, i

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

Za $Y : \Omega_1 \to \Omega_2$, neka je

$$Y(y) = 1 + \mathbb{1}(y \in [0.4, 0.6]) + \mathbb{1}(y \in [0.5, 0.7]).$$

Koje skupove mora da sadrži $\mathcal{F}_1$ (sigma algebra nad Ω_1) da bi Y bila merljiva funkcija?

32.4 Uzmimo $\Omega_3 = [-1,1]$ i $\Omega_4 = [0,5]$. Za $X : \Omega_3 \to \Omega_4$ definisano kao

$$X(x) = x^2,$$

i

$$\mathcal{F}_4 = \{\emptyset, [0.5, 1.5], [0, 0.5) \cup (1.5, 5], [0, 5]\},$$

koje skupove mora sadržati $\mathcal{F}_4$ (sigma algebra nad Ω_4) da bi X bila merljiva funkcija?

32.5 Nastavljajući sa Y od ranije, ako je $\mathbb{P}_1$ nad Ω_1 uniformna, koliko je $\mathbb{P}(Y \leq 2)$?

32.6 Nastavljajući sa X od ranije, ako je $\mathbb{P}_3$ nad Ω_3 uniformna, koliko je $\mathbb{P}(X \leq 0.3)$?

Deo II

Eksperimenti iz verovatnoće

Glava 33

Upoznavanje sa slučajnošću

Sažetak U ovim vežbama ćete razumeti osnovno ponašanje slučajnih promenljivih kroz upotrebu programskog okruženja R. Komanda `sample` može se koristiti za dobijanje slučajnih promenljivih iz različitih raspodela. Komanda `hist` može se koristiti za sumarizaciju podataka.

Uputstva U ovim prvim vežbama naučićemo kako se koristi programsko okruženje R kako bismo saznali više o verovatnoći. Ove vežbe su podeljene na dva dela da biste mogli da procenite svoj napredak.

Pre nego što počnete Budite sigurni da je na vaš računar ili laptop instalirana najnovija verzija R i RStudio softvera.

- Možete naći R na `https://www.r-project.org/`. Kliknite na link da **daunloadujete R** u prvom paragrafu, i nastavite odatle dalje.
- RStudio je IDE za R koji možete preuzeti sa lokacije na adresi `https://posit.co/products/open-source/rstudio/`. Kliknite na dugme **DOWNLOAD RSTUDIO** u gornjem desnom uglu veb stranice. Obavezno preuzmite `RStudio Desktop` a *ne* `RStudio Desktop Pro`.

Prvi deo Za početak, pokrenite RStudio, integrisano razvojno okruženje (IDE) za R. U donjem levom prozoru će biti konzola. Tu možete uneti komande i videti šta R radi.

- Počećemo sa jednostavnom aritmetikom. Upišite

  ```
  3 + 5
  ```

  Imajte na umu da R vraća `[1]  8`. 8 je naravno odgovor za $3 + 5$, `[1]` označava da je 8 prvi broj u izlazu. Unesite da koristite R da izračunate $141 + 232 - 14$ i zabeležite svoj odgovor.

- Korisno je koristiti R za generisanje nizova. Probajte

  ```
  1:6
  ```

i zabeležite rezultat.

- Sada ćemo baciti šestostranu fer kockicu. Probajte

  ```
  sample(1:6, 1)
  ```

  i zabeležite rezultat.

- Sada pokušajte sa sledećom komandom `sample(1:6, 1)` tri puta. Ne morate ponovo kucati komandu tri puta, koristite strelicu prema gore da biste dobili prethodno korišćene komande u R.

- R naravno može izvući tri broja iz niza tako što ćete proslediti više parametara funkciji `sample`. Unesite:

  ```
  sample(1:6, 3)
  ```

  i zabeležite rezultat.

- Primetite da su vraćeni brojevi svi različiti. To je podrazumevano ponašanje za komandu `sample`. Možete videti da ovo izaziva probleme kada pokušajte da uzorkujete više vrednosti nego što ima u skupu. Unesite

  ```
  sample(1:6, 7)
  ```

  Prijavite poslednjih pet reči poruke o grešci koju daje R.

- Da bismo saznali više o `sample`, možemo staviti `?` ispred komande da bi ušli u help. Ekran pomoći se pojavljuje u desnom uglu. Unesite

  ```
  ?sample
  ```

  Koja su prva dva parametra komande `sample`?

- Da bismo dobili uzorkovanje sa vraćanjem, moramo da dodamo još jedan parametar. Unesite

  ```
  sample(1:6, 7, replace = TRUE)
  ```

  (Imajte na umu da su TRUE ovde sva velika slova.) Zabeležite rezultat.

- Sada zadržimo vaš uzorak u drugoj promenljivoj. U R-u, <− komanda dodeljuje vrednost imenu promenljive. Zato pokušajte

  ```
  x <- 5
  y <- 3
  x + y
  ```

  Sačuvajte svoj odgovor.

- Sada stavimo naš slučajni uzorak u promenljivu. Unesite

  ```
  results <- sample(1:6, 7, replace = TRUE)
  print(results)
  ```

  i sačuvajte rezultate.

- Hajde da napravimo puno bacanja poštenih šestostranih kockica, i pogledamo histogram rezultata. Unesite

  ```
  results <- sample(1:6, 10^7, replace = TRUE)
  hist(results)
  ```

  i skicirajte rezultat.

- Niz `1:6` je primer *vektora* u R. Da bi kreirali vektor ručno možete koristiti komandu `c` [9]. Unesite sledeće

  ```
  die <- c(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
  print(die)
  ```

  Zabeležite rezultat.

- Sada ćemo uzeti uzorke iz ove raspodele. Unesite

  ```
  results.die <- sample(die, 10^7, replace = TRUE)
  hist(results.die)
  ```

  i skicirajte rezultat.

[9] *c je od engleskog "combine"što znači spojiti - prim. prev.*

- Ako želimo da vidimo sedmi unos iz `results.die`, možemo koristiti četvrtaste zagrade. Unesite

  ```
  print(results.die[7])
  ```

  i zabeležite rezultat.

- Da biste videli prvih deset unosa `results.die`, kombinujte zagrade sa zapisom niza. Unesite

  ```
  print(results.die[1:10])
  ```

  i zabeležite rezultat.

- Možemo da proverimo koji od prvih 10 unosa su jednaki 1 koristeći == komandu. Unesite

  ```
  print(results.die[1:10] == 1)
  ```

  Da li se obrazac TRUE i FALSE podudara sa onim što ste mislili?

- Ako primenimo numeričku funkciju na izlaz, onda će ona pretvoriti TRUE u 1 i FALSE na 0. Unesite

  ```
  sum(results.die[1:10] == 1)
  ```

  Sačuvajte rezultat.

- Možemo proceniti verovatnoću da se pojavi 1 uzimajući broj jedinica koje se pojavljuju i deljenjem sa brojem izvlačenja. Unesite

  ```
  sum(results.die == 1) / length(results.die)
  ```

  Sačuvajte rezultat. Da li ste to i očekivali?

Drugi deo U ovom drugom delu vežbi naučićete o funkcijama `min`, `max`, i `sum` u R.

- Funkcija `min` nalazi najmanju vrednost u vektoru. Unesite

  ```
  v <- c(10, 4, 7)
  min(v)
  ```

  Sačuvajte rezultat.

- Funkcija `max` nalazi najveću vrednost u vektoru. Unesite

  ```
  max(v)
  ```

Sačuvajte rezultat.

- Komanda `sum` nalazi zbir vrednosti u vektoru. Unesite

```
sum(v)
```

Sačuvajte rezultat.

- Ove komande možemo koristiti na višestruka bacanja naše šestostrane kocke. Unesite

```
min(sample(1:6, 3, replace = TRUE))
```

i zapišite rezultat. Ovo je najmanja vrednost među tri bacanja poštene šestostrane kocke.

- Koja je verovatnća da je $\min\{X_1, X_2, X_3\} = 1$ gde su $X_1, X_2, X_3 \sim \mathsf{Unif}(\{1, \ldots, 6\})$ nezavisne i sa istom raspodelom (skraćeno iid)? (Savet: moglo bi biti lakše izračunati komplement ovog događaja.)

- Hajde da testiramo vaš odgovor simulacijom. Prvo, moramo da generišemo gomilu izvlačenja minimuma od tri bacanja. Možemo koristiti komandu `replicate` u R da bismo ovo postigli. Unesite

```
results <- replicate(10^6, min(sample(1:6, 3, replace = TRUE)))
hist(results)
```

i skicirajte svoje rezultate. Zato što koristimo funkciju minimuma, rezultat je bliže 0.

- Procenite verovatnoću da se dogodio 1 sa

```
sum(results == 1) / length(results)
```

Zabeležite rezultat.

- Sada isprobajte funkciju maksimum sa

```
results <- replicate(10^6, max(sample(1:6, 3, replace = TRUE)))
hist(results)
```

i skicirajte rezultat.

- Na kraju (ali ne i najmanje važno) pokušajmo da saberemo tri bacanja kockica, i skiciramo histogram.

  ```
  results <- replicate(10^6, sum(sample(1:6, 3, replace = TRUE)))
  hist(results)
  ```

- Ranije smo koristili naredbu `sample` za uzimanje iz skupa objekata sa vraćanjem, ali šta ako uzimamo bez vraćanja? Tada imamo posla sa slučajnom permutacijom objekata. Unesite

  ```
  letters <- c('a', 'a', 'a', 'b', 'b')
  perm <- sample(letters)
  print(perm)
  ```

  Zabeležite rezultat.

- Imajte na umu da iako smo koristili jednostruki navodnik ’ u definisanju promenljive `letters`, R štampa rezultat koristeći dvostruki navodnik ". U stvari, možete koristiti ili jednostruki ili dvostruki navodnik u definisanju slova (koja se koji se nazivaju stringovi u većini računarskih jezika).

  Kolika bi trebalo da bude verovatnoća da slovo ‘a‘ padne na treću poziciju?

- Sada hajde da to testiramo kroz simulaciju. Unesite

  ```
  results <- replicate(10^5, sample(letters)[3] == 'a')
  sum(results)/length(results)
  ```

  Zabaležite svoju ocenu.

- Koristili smo `sum(results)/length(results)` da dobijemo prosečnu vrednost vektora rezultata, ali postoji zapravo komanda u R koja radi i jedno i drugo istovremeno. Probajte

  ```
  \mean(results)
  ```

- Pokušajte da ocenite verovatnoću da se ’a’ nalazi se na četvrtoj poziciji. Da li je pozicija važna za verovatnoću?

- Pokušajte da ocenite verovatnoću da se ’b’ nalazi se na 3. poziciji.

Glava 34

Neprekidne slučajne promenljive

Sažetak U prvom delu vežbi naučićete da koristite komande `runif` za generisanje slučajnih promenljivih uniformnih nad $[0, 1]$. U drugom delu naučićete o *statistikama poretka* i komandi `sort` .

- Unesite komandu

  ```
  runif(1)
  ```

  Ovo generiše jedan uniformni slučajni broj u intervalu $[0, 1]$. Unesite komandu tri puta i zabeležite svoje rezultate. Usput, ne morate ponovo da kucate komandu tri puta: koristite taster sa strelicom nagore da ponovo izdate komande koje koji ste prethodno koristili u R.

- Imajte na umu da je R mogao da generiše sva 3 broja ođednom promenom parametar dat `runif`. Unesite

  ```
  runif(3)
  ```

  i zabeležite svoje rezultate.

- Sada stavimo 1000 nasumičnih iid uniformnih $[0, 1]$ brojeva u niz sa

  ```
  a <- runif(1000)
  ```

  Sada otkucajte `a`. Možete videti da prikazuje brojeve. Možda je korisniji grafički prikaz. Unesite

  ```
  plot(a)
  ```

  Na x-osi su brojevi od 1 do 1000, koji pokazuju koja uniformna se prikazuje. Na y-osi su konkretni brojevi, koji su svi između 0 i 1. Sada pokušajte

  ```
  hist(a)
  ```

da bi dobili histogram dobijenih brojeva. Skicirajte rezultujući grafik.

- Za razliku od diskretnih slučajnih varijabli iz naših poslednjih vežbi, za neprekidne slučajne promenljive ne postoji lak način da se vidi koliko traka treba da bude u histogramu. Histogram će verovatno podrazumevano sadržati oko 10 traka, ali možemo to promeniti tako što ćemo proslediti parametre funkciji `hist`. Možemo kreirati naprednije nizove brojeva u R koristeći komandu `seq`. Unesite

  ```
  seq(0, 1, by = 0.1)
  ```

  Šta dobijate?

- Hajde da napravimo više traka koristeći komandu `seq` da bismo dali granice histograma. Unesite

  ```
  hist(a, seq(0, 1, by = 0.05))
  ```

  Koliko traka ima u histogramu?

- Naš histogram izgleda pomalo neuredno, pa hajde da povećamo broj uniformnih koje koristimo. Pokušati

  ```
  hist(runif(10^6), seq(0, 1, by = 0.05))
  ```

  Koja je učestalost svake trake?

- Možete dobiti ugrađenu pomoć za komandu `hist` korišćenjem `?hist` u R. Uvek ? ispred komande daje pomoć za tu komandu. Naravno, uvek možete naučiti o komandi u R guglanjem. Ako pokušate `?hist`, videćete da postoji parametar `probability` koji je logička negacija parametra `freq`. Unesite sledeću komandu

  ```
  hist(runif(100000), seq(0, 6, by = 0.05), freq = FALSE)
  ```

  Koja je sada oznaka na y-osi?

- Za razliku od diskretnih uniformnih slučajnih promenljivih, kontinuirane uniformne promenljive mogu se *šiftovati* i *skalirati*. Počnimo sa skaliranjem. Unesite

  ```
  results <- 3 * runif(10^6)
  hist(results, seq(0, 3, by = 0.05), freq = FALSE)
  ```

Skicirajte rezultujući histogram.

- Rezultat množenja uniformne nad $[0, 1]$ sa 3 je skaliranje intervala. Dobijena slučajna promenljiva je sada uniformna preko $[0, 3]$. Sada hajde da pomerimo uniformnu dodavanjem broja 2. Ovo će učiniti novu slučajnu promenljivu uniformnom nad $[2, 5]$.

```
results <- 3*runif(10^6) + 2
hist(results,seq(0,6,by=0.05),freq=FALSE)
```

Skicirajte rezultujući histogram.

- Ovo je ocena funkcije gustine uniformnih. Hajde da da pogledamo gustinu funkcije kvadrata uniformnih. Unesite

```
hist(runif(100000)^2, breaks = 20, freq = FALSE)
```

i skicirajte rezultat. Ovo je ocena gustine za kvadrat uniformnih. Prisetite se da kvadriranje broja između 0 i 1 će ga učiniti manjim, tako da ovo gura gustinu prema manjim vrednostima.

- Ponovimo, ali sa funkcijom kvadratnog korena

```
hist(runif(100000)^(1/2), breaks = 20, freq = FALSE)
```

i skicirajte rezultat. Ovo je ocena gustine za kvadratni koren uniformnih. Zapamtite da uzimanje kvadratnog korena broja između 0 i 1 će ga učiniti većim, tako da ovo gura gustinu prema vrednostima bliže 1.

- Zatim uradimo ovo za negativnu log funkciju

```
hist(-log(runif(100000)), breaks = 20, freq = FALSE)
```

i skicirajmo rezultat.

- Sada probajmo da ocenimo nešsto tipa $\mathbb{P}(U_1 \leq U_2^2)$, gde su U_1 i U_2 nezavisne unifiormne nad $[0, 1]$. Pokušajmo

  ```
  mean(runif(10^6) <= runif(10^6)^2)
  ```

  Prikažite svoj rezultat. Da li ste ovo i očekivali?

- Iskoristite istu ideju da ocenite $\mathbb{P}(U_1 \leq U_2^3)$.

Drugi deo U ovom delu vežbi proučavaćemo takozvane *statistike poretka* slučajnih promenljivih. Prve statistike poretka koje ćemo ispitati su maksimum i minimum slučajnih promenljivih.

- Još dve funkcije koje ćemo mnogo koristiti u ovom kursu su `max` i `min`. Unesite

  ```
  max(10, 14)
  ```

  i zabeležite rezultat.

- Sada generišete maksimum dva uniformna slučajna broja.

  ```
  max(runif(2))
  ```

  Želimo da uradimo ovu akciju mnogo puta, pa ćemo koristiti komandu `replicate`

  ```
  a <- replicate(10000, max(runif(2)))
  hist(a, breaks = 20, freq = FALSE)
  ```

  Skicirajte rezultujuću ocenu gustine.

- Koliki je opseg gustine (y-osa)?

- Sada generišite jednak broj slučajnih promenljivih koji je maksimum tri nezavisne uniformne, i skicirajte rezultujući histogram.

- Još jedna korisna funkcija je `sum`. Unesite sledeće.

  ```
  a <- replicate(10000, sum(runif(2)))
  hist(a, breaks = 20, freq = FALSE)
  ```

  Skicirajte rezultat.

- Uradite istu stvar, ali sa 100000 replika i zbirom 10 uniformnih.

- Maksimum je najveći od uniformi, a minimum je najmanji. Kako da dođemo do srednjeg? Možemo da iskoristimo komandu `sort` u R. Unesite

```
sort(runif(3))
```

  i prikažite rezultat.

- Drugi element ovog vektora možemo izabrati pomoću `sort(unif(3))[2]`. (Imajte na umu da koristimo zagrade `[2]` oko 2 kada biramo elemente iz vektora.)

```
b <- replicate(10000, sort(runif(3))[2])
hist(b, breaks = 20, freq = FALSE)
```

  i skicirajte rezultat. Obratite pažnju na to kako koristeći ovu srednju vrednost veća je verovatnoća da ćemo dobiti broj u sredini intervala $[0, 1]$ nego sa običnom uniformnom.

- Kada sortirate slučajne promenljive X_1, X_2, X_3 kreirate ono što zovemo *statistike poretka*. Napisane su pomoću zagrada oko indeksa, dakle

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}.$$

  Na primer, ako je $X_1 = 0.34$, $X_2 = 0.15$ i $X_3 = 0.75$, onda je $X_{(1)} = 0.15$, $X_{(2)} = 0.34$ i $X_{(3)} = 0.75$. Probajte da generišete 10^6 uzoraka treće statistike poretka od 10 unfiormnih, i skicirajte histogram rezultata.

- Hajde da razmotrimo kako izračunati

$$\mathbb{P}(X_{(2)} < 0.3, X_{(3)} \geq 0.3\}.$$

  Ovo govori da je drugi najmanji broj manji od 0.3, a treći najmanji od brojeva je najmanje 0.3. Da bi se ovo desilo, tačno dve uniformne moraju biti najviše 0.3, a tačno osam uniformnih mora biti najmanje 0.7. Postoji 10 nad 2 načina da se izaberu male uniformne, i zatim su velike uniformne one koji ostaju. Šansa da su odabrane uniformne male je 0.3^2, a šansa da su neodabrane uniforme velike je 0.7^8. Dakle, sve u svemu, šansa je

$$\binom{10}{2} 0.3^2 0.7^8.$$

  Možete naći ovu vrednost u R koristeći

```
choose(10, 2) * 0.3^2 * 0.7^8
```

Kolika je ova verovatnoća?

- Pokušajmo sada da ocenimo ovu verovatnoću simulacijom. Moramo da generišemo slučajnu promenljivu koja je 1 ako je $X_{(2)} < 0,2$ i $X_{(3)} \geq 0,3$ i 0 u suprotnom. Da bismo to uradili, moraćemo da repliciramo dve komande. Više komandi se može kombinovati u R u jednom redu pomoću simbola tačke i zareza `;`. Stavićemo ovo u vitičaste zagrade { i } da označimo da komande treba spojiti.

```
{v <- sort(runif(10)); as.integer(v[2] < 0.3 & v[3] >= 0.3)}
```

Prikažite rezultat.

- Uzgred, slučajna promenljiva koja je ili 0 ili 1 se zove *Bernulijeva* ili *indikatorska* slučajna promenljiva. Zove se indikatorska slučajna promenljiva jer može biti napisana pomoću indikatorske funkcije.

$$Y = \mathbb{1}(X_{(2)} < 0.3, X_{(3)} \geq 0.3).$$

Sada, jedan uzorak iz raspodele Y nije od velike pomoći. Uradimo ovo milion puta i zabeležimo rezultate.

```
results <- replicate(10^6, {v <- sort(runif(10)); as.integer(v
   [2]<0.3 & v[3] >= 0.3)})
mean(results)
```

(Imajte na umu da ova prva komanda može potrajati u zavisnosti od brzine vašeg računara. Prvo je isprobajte sa 10^4, a zatim 10^5 da biste dobili predstavu o tome koliko će dugo trebati 10^6.) Prikažite svoju ocenu.

- Izračunajte tačno sledeću verovatnoću za $X_1, \ldots, X_{10}$ iid $\mathsf{Unif}([0,1])$.

$$\mathbb{P}(X_{(4)} < 0.5, X_{(5)} \geq 0.5).$$

- Sada ocenite gornju verovatnoću koristeći 10^6 uzoraka iz $\mathbb{1}(X_{(4)} < 0.5, X_{(5)})$. Prikažite svoj rezultat.

- Sada razmotrite drugačiji problem. Pretpostavimo da su $T_1 \sim \mathsf{Exp}(1)$ i $T_2 \sim \mathsf{Exp}(2)$ nezavisne eksponencijalne slučajne promenljive. Zatim, pošto T_2 ima veći parametar, imaće tendenciju da bude manja od T_1. Ali kakva je šansa da se to desi? Da biste saznali, prvo razmislite o generisanju kopija T_1 i T_2 slučajnih promenljivih uniformno, i upoređujte jedan po jedan. Unesite

```
n <- 10^6
t1 <- -log(runif(n))
t2 <- -log(runif(n)) / 2
mean(t2 <= t1)
```

i prikažite svoju ocenu.

- Oceniti verovatnoću da je $T_1 \sim \mathsf{Exp}(1)$ veliko bar koliko i $T_3 \sim \mathsf{Exp}(3)$ ako su slučajne promenljive nezavisne.

Glava 35

Uslovljavanje

Sažetak Delimične informacije o slučajnoj promenljivoj se mogu kodirati pomoću *uslovljavanja.* Pišemo $\mathbb{P}(A|B)$ za verovatnoća da se dogodi A ako se dogodi B. Formula uslovne verovatnoće je (za $\mathbb{P}(B) > 0$)

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prvi deo Jedan od načina razmišljanja o verovatnoći događaja je da se eksperiment izvodi istovremeno u beskonačnom broju paralelnih univerzuma. Procenat univerzuma gde se taj događaj desi je verovatnoća događaja. Ovakav način razmišljanja o verovatnoći naziva se *frekvenistička* interpretacija i daje nam način da procenimo verovatnoće izvođenjem nezavisnih eksperimenata.

- Počnimo sa generisanjem uniformnih sl. prom. nad $\{1, \ldots, 10\}$. Imajte na umu da ćemo uraditi eksplicitno podešavanje parametara u sledećoj komandi. Ovim načinom ne moramo da pamtimo kojim redosledom se parametri unose.

  ```
  sample(x=1:10, size = 5, replace = TRUE)
  ```

  Sačuvajte dobijeni uzorak.

- Sada uradimo istu stvar, ali sa parametrima unešenim drugačijim redosledom.

  ```
  sample(size = 5, replace = TRUE, x = 1:10)
  ```

- Sada pokušajte da generišete 7 iid uzoraka iz $\{1, \ldots, 10\}$. Napišite niz komandi koje ste koristili.

- Hajde sada da napravimo gomilu ovakvih izvlačenja. Unesite

  ```
  results <- sample(x=1:10, size = 10^6, replace = TRUE)
  head(results)
  length(results)
  ```

Koliko elemenata ima vektor results?

- Iscrtajte histogram ovih rezultata komandom

```
hist(results, breaks = 0:10)
```

i prikažite rezultate.

- Za događaj A, možemo proceniti verovatnoću da se dogodi A računajući od naših pokušaja, koliko ih je palo u A. Na primer, za $A = \{1, 2, 3, 4\}$, unos

```
results[1:10] <= 4
```

vraća vektor čije su vrednosti TRUE ili FALSE. Ako iskoristimo

```
sum(results[1:10] <= 4)
```

onda se sve TRUE vrednosti pretvore u 1, a FALSE vrednosti u 0 i sabrane nam govore koliko ima istinitih uslova. Koliko je TRUE vrednosti bilo u vaših prvih deset uniformnih?

- Sada ćemo oceniti $\mathbb{P}(U \in A)$ preko

```
sum(results <= 4) / length(results)
```

To nam govori koliki je procenat uniformnih iz izvlačenja od njih 10^6 bilo manje jednako 4. Umesto da iskoristimo `sum` i `length` pa ih podelimo, možemo iskoristiti i `mean`. Unesite

```
mean(results <= 4)
```

i prijavite svoj rezultat.

- Da izaberemo neke elemente iz `results`, možemo da iskoristimo `results[1:10]`. Probajte ovo i zabeležite rezultat.

- Možemo koristiti logički uslov da pronađemo elemente koji zadovoljavaju određeni kriterijum. Prvo stavljamo prvih deset elemenata rezultata u `x`. Zatim vraćamo samo one elemente `x` koji su najviše 6.

```
x <- results[1:10]
print(x)
print(x[x <= 6])
```

Zabeležite rezultat.

- Poslednja komanda je odabrala prvih deset unose `results` koji su bili najviše 6. Hajde sada da uradimo to za ceo milion unosa.

  ```
  r6 <- results[results <= 6]
  ```

  Koliko elemeneta ima u `r6`?

- Hajde sada da nacrtamo histogram `r6`

  ```
  hist(r6, breaks = 0:10)
  ```

  i prikažimo rezultate.

- Koristeći notaciju uslovljavanja kažemo da za $X \sim \mathsf{Unif}(\{1, \dots, 10\})$

  $$[X|X \leq 6] \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\}).$$

  Koja je raspodela od $[X|X \leq 3]$?

- U redu, hajde da koristimo naše uniformne za kreiranje događaja i testiranje formule uslovne verovatnoće. Podsetite se da za slučajne promenljive X i Y, ako je $\mathbb{P}(X \in A) > 0$,

  $$\mathbb{P}(Y \in B|X \in A) = \frac{\mathbb{P}(Y \in B, X \in A)}{\mathbb{P}(X \in A)}.$$

  Ako je $U \sim \mathsf{Unif}(\{1, \dots, 10\})$, uzmimo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Formula uslovne verovatnoća onda kaže

  $$\mathbb{P}(U \in A|U \in B) = \frac{\mathbb{P}(U \in A \cap B)}{\mathbb{P}(U \in B)}.$$

  Još uvek imamo 10^6 uniformnih u `results`. Prvo ocenimo $\mathbb{P}(U \in B)$ sa

  ```
  sum(results <= 7 & results >= 3) / length(results)
  ```

  Primetimo da karakter `&` predstavlja *logičko i* u R. To znači da oba broja moraju biti najviše 7 i najmanje 3 da bi ovaj uslov bio istinit. Zabeležite dobijenu ocenu.

- Zatim ocenite verovatnoću da je naš rezultat i u A i u B.

  ```
  sum(results <= 7 & results >=3 & results <= 4) / length(
     results)
  ```

  Zabeležite dobijenu ocenu za $\mathbb{P}(U \in A \cap B)$.

- Dakle, naša ocena $\mathbb{P}(U \in A|U \in B)$ je ocena za $\mathbb{P}(U \in A, B)/\mathbb{P}(U \in B)$. Sačuvajte ovu ocenu.

- Sada hajde da pokušamo da direktno uslovljavamo. Prvo napravite vektor `ub` koji sadrži uniformne uslovljene da leže u B. Onda vidite koliko njih upadaju u A.

  ```
  ub <- results[results <= 7 & results >= 3]
  sum(ub <= 4) / length(ub)
  ```

  Zabeležite ocenu za $\mathbb{P}(U \in A|U \in B)$. Kako se ona poredi sa našom prethodnom ocenom?

Drugi deo

Bajesovo pravilo

- Jedna od klasičnih grešaka u verovatnoći je mešanje $\mathbb{P}(A|B)$ (verovatnoća da se desi A ako se dogodi B) i $\mathbb{P}(B|A)$ (šansa da se dogodi B ako se dogodi A.) Hajde da se pozabavimo ovim putem eksperimenta. Pretpostavimo da je $U \sim \text{Unif}([0,1])$, i $A = \{U \in [0, 0.3]\}$, dok je $B = \{U \in [0.2, 0.4]\}$. Prvo da ocenimo $\mathbb{P}(A|B)$:

  ```
  results <- runif(10^6)
  mean(results[results <= 0.4 & results >= 0.2] <= 0.3)
  ```

  Imajte na umu da deo `results <= 0.4 &results >= 0.2]` zadržava uniformne samo u intervalu $[0.2, 0.4]$. Ovo je uslovljavanje na B. Tada je deo `<= 0.3` ocena verovatnoće da se A dogodi ako je dato B. Zabeležite dobijenu ocenu.

- Hajde sada da pokušamo obrnuto i ocenimo verovatnoću od B ako je dato da se A javlja.

  ```
  mean((results[results <= 0.3] <= 0.4) & (results[results <=
     0.3] >= 0.2))
  ```

  Zabeležite dobijenu ocenu. Setite se da je vaša prva ocena bila za $\mathbb{P}(A|B)$, a ovo je ocena za $\mathbb{P}(B|A)$.

- Bajesovo pravilo kaže da postoji način da se uslovljavanje preokrene, da je

  $$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

  Pokušajmo ovo

  ```
  prob.b <- mean((results <= 0.4) & (results >= 0.2))
  prob.a <- mean(results <= 0.3)
  prob.bgivena <- mean((results[results<=0.3] <= 0.4) & (results[
     results <= 0.3] >= 0.2))
  print(prob.bgivena * prob.a / prob.b)
  ```

  Zabeležite rezultat.

- Klasičan problem koji uključuje Bajesovo pravilo je sledeći. Pretpostavimo da postoji a 1% šanse da određena osoba ima bolest. Test na bolest je tačan 95% vremena, ali je pogrešan 5% vremena. Ako test kaže da osoba ima bolest, kolika je šansa da osoba zaista ima bolest?

  Da bismo ovo simulirali, koristićemo U_1 da utvrdimo da li neko ima bolest, a U_2 da utvrdimo da li je neko pozitivan na bolest. Počnite sa sledećim.

  ```
  u1 <- runif(10^8)
  u2 <- runif(10^8)
  ```

Neko ima bolest ako je $U_1 \leq 0.01$. Ako je $U_1 \leq 0.01$, test je pozitivan ako je $U_2 \leq 0.95$. Ali ako je $U_1 > 0.01$ (osoba nema bolest) test je pozitivan ako nije tačan, to jest, ako je $U_2 > 0.95$. Prisetimo se da je `&` logičko i, dok je `|` logičko ili. Dakle, zadržavamo samo rezultate tamo gde je test pozitivan ako postavimo

```
test.pos <- u1[((u1 <= 0.01) & (u2 <= 0.95)) | ((u1 > 0.01) & (
    u2 > 0.95))]
print(length(test.pos)/length(u1))
```

Prijavite rezultat ovih komandi. Da li se ovo uklapa sa onim što ste mislili da je verovatnoća pozitivnog testa?

- Dakle, `test.pos` sada sadrži sve uniforme na kojima je test bio pozitivan. Neki od njih su pozitivni jer je $U_1 \leq 0.01$ i $U_2 \leq 0.95$, ali neki su pozitivni jer je $U_1 > 0.01$ i $U_2 \leq 0.05$. Da procenite šansu da neko zaista ima bolest, pokušajte

  ```
  mean(test.pos <= 0.01)
  ```

  Zabeležite rezultat.

- Imajte na umu da iako je test bio pozitivan, šansa da postoji bolest je i dalje samo jedan od šest. Razlog tome je što je mnogo verovatnije da osoba nema bolest i da je test je pogrešan ($0.99 \cdot 0.05 = 0.0495$) nego da osoba ima bolest i da je test bio tačan $0,01 \cdot 0.95 = 0.0095$). Dakle, s obzirom da je test bio pozitivan, šansa za oboljenje je samo $0.0095/[0.0095 + 0.0495]$. Pronađite ovu vrednost.

Uniformne u više od dve dimenzije

- Princip koji kaže da za $A \subset B$, ako je $X \sim \textsf{Unif}(B)$, onda $[X|X \in B] \sim \textsf{Unif}(A)$ radi i u višim dimenzijama. Hajde da napravimo 1000 tačaka u jediničnom kvadratu.

  ```
  results <- replicate(1000, runif(2))
  ```

  Ovo stvara matricu sa dva reda i 1000 kolona. Prvo hajde da transponujemo matricu tako da postoje dve kolone i 1000 redova (da bi više ličila na statističke podatke.)

  ```
  results <- t(results)
  ```

  Prijavite rezultat korišćenja `head(results)`.

- Primetite da je prva kolona obeležena sa `[,1]` a druga sa `[,2]`. U R, zarez je džoker znak. Dakle, `[,1]` označava sve stavke u bilo kojoj vrsti i prvoj koloni. Hajde da nacrtamo prvu kolonu kao horizontalnu osu, a drugu kolonu kao vertikalnu osu.

```
plot(results[,1], results[,2])
```

Ovako izgledaju potpuno uniformni slučajni podaci. Sada da odaberemo vrste u kojima je x koordinata manja od y koordinate.

```
r1 <- results[results[,1] <= results[,2],]
plot(r1[,1], r1[,2])
```

Kakav je rezultujući oblik tačaka? Drugim rečima, za $(X, Y)\mathsf{Unif}([0,1] \times [0,1])$,

$$[(X, Y)|X \leq Y] \sim \mathsf{Unif}(A),$$

kakva je oblast A?

Kvote

- Drugi način da vidite uslovljavanje je korišćenje *kvota*(šansi). Kvota (šansa) između dva disjunktna događaja je odnos verovatnoća za svaki od događaja. Na primer, uzmimo

  $$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{9}, \ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{9}, \ \mathbb{P}(X = 3) = \frac{4}{9}.$$

  Onda su šanse da je $X = 1$ naspram $X = 2$ jednake $(2/9)/(3/9) = 2/3$, što može da se zapiše kao $2 : 3$ (čita se 2 prema 3). Koje su šanse da je $X = 1$ naspram $X = 3$?

- Prednost označavanja dvotačkom u odnosu na zapis razlomka je da se kvote mogu dati za više od dve stvari istovremeno. Na primer, šanse za $X = 1$ naspram $X = 2$ naspram $X = 3$ je

  $$2 : 3 : 4.$$

  Ovo nam govori da je kvota za $X = 2$ u odnosu na $X = 3$ jednaka $3 : 4$. Pretpostavimo da $Y \in \{1, 2, 3, 4\}$ ima šanse

  $$3 : 1 : 2 : 7.$$

  Koje su šanse da je $Y = 1$ naspram $Y = 4$?

- Lepa stvar u vezi sa kvotama je da kada uslovljavamo događajem, šanse ostaju iste, samo zadržavamo vrednosti date informacijom. Na primer, za $[Y|Y \in \{1, 3, 4\}$, samo zadržavamo šanse vezane za 1, 3, i 4. Tako da su šanse za $Y = 1$ naspram $Y = 3$ naspram $Y = 4$ dato da je $Y \in \{1, 3, 4\}$, jednake

  $$3 : 2 : 7.$$

  Koje su šanse da Y bude1, 2, or 3 ako je dato da je $Y \in \{1, 2, 3\}$?

- Da biste šanse prebacili u verovatnoće, jednostavno podelite sa normalizujućom konstantom koja čini da se kvote sabiraju u 1. Za X sa kvotom $2 : 3 : 4$, saberite ih da biste dobili $2 + 3 + 4 = 9$, i podelite sa 9 da biste dobili kvote od $(2/9) : (3/9) : (4/9)$. Tada je verovatnoća od $X = 1$ jednaka $2/9$, i tako dalje. Koje su verovatnoće za $Y \in \{1, 2, 3, 4\}$ za kvote koje smo dali ranije?

- Hajde sada da iskombinujemo ove ideje. Znamo koje su šanse da Y bude 1 naspram 2 naspram 3 dato da je $Y \in \{1, 2, 3\}$. Sada pronađite $\mathbb{P}(Y = i|Y \in \{1, 2, 3\})$ za $i \in \{1, 2, 3\}$.

Glava 36

Neprekidne raspodele

Do sada smo koristili komandu `hist` u R za aproksimaciju gustine, ali za neprekidne slučajne promenljive komanda `plot(density)` je mnogo korisnija. Ova komanda kreira ono što se zove *grafikon kernela gustine* i iako ne rukuje dobro diskontinuitetima u raspodeli, daje jasniju sliku o tome šta se dešava sa raspodelom.

- **Uniformne** Prva gustina koju imamo je $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$.

  $$f_U(s) = \mathbb{1}(s \in [0,1]).$$

  Skicirajte grafik ove funkcije.

- Sada, R ima ugrađenu komandu za procenu gustine slučajnih promenljivih. Ime je `d` praćeno nazivom raspodele. Unesite sledeće komande

  ```
  dunif(1.1)
  dunif(0.6)
  dunif(-0.3)
  ```

  i prikažite rezultate.

- Naravno, mogli smo to isto da ostvarimo korišćenjem vektora:

  ```
  dunif(c(1.1,0.6,-0.3))
  ```

  vraća tri vrednosti. Iskoristimo ovo da nacrtamo gustinu uniformne. Unesite

  ```
  x <- seq(-2,2,by=0.1)
  plot(x,dunif(x),type='l')
  ```

  i prikažite rezultate. (Obavezno ukucajte `l` za liniju a ne `1` za broj jedan!) .

- Imajte na umu da to nije dobro obradilo diskontinuitete u 0 i 1. Hajde sada da ocenimo funkciju gustine prikazivanjem uzoraka iz uniformne raspodele. Da bi ovo uradili, koristićemo komandu `density`. Unesite sledeće

  ```
  results <- runif(10^6)
  plot(density(results))
  ```

  Skicirajte rezultat. Ova komanda pokušava da aproksimira šta je funkcija gustine za slučajne promenljive.

- Ovo se zove *grafikon kernela gustine.* Kao i kod determinističkog zapleta, dijagram kernela gustine ne obrađuje dobro diskontinuitete. Hajde da pokušamo da procenimo kernel gustine zbira dve uniformne slučajne promenljive. Ovde će gustina biti neprekidna, i tako će procena kernela gustine biti prilično dobra.

  ```
  r2 <- replicate(10^5,sum(runif(2)))
  plot(density(r2))
  ```

  Skicirajte rezultat.

- **Ekponencijalna** Možete dobiti eksponencijalnu slučajnu promenljivu sa parametrom λ uzimanjem minusa prirodnog logaritma uniformne, a zatim deljenjem sa λ. Gustina je

  $$f(s) = \lambda \exp(-\lambda s)\mathbb{1}(s \geq 0).$$

  Da li ova gustina ima tačke prekida?

- Unesite

  ```
  results <- -log(runif(10^6))
  plot(density(results))
  ```

  i prikažite rezultat.

- Hajde da svemu dodamo i liniju koja pokazuje pravu gustinu.

  ```
  x <- seq(0,8,by=0.1)
  lines(x,exp(-1*x),col="blue",lwd=2)
  ```

Obratite pažnju na korišćenje naredbe `lines` umesto naredbe `plot`. Da ste koristili `plot`, R bi počeo ispočetka sa novim grafikonom. Korišćenjem `lines`, R stavlja rezultat povrh postojećeg dijagrama.

Zatim ponovite ovaj eksperiment za $\lambda = 0.7$.

```
plot(density(results/0.7))
lines(x,0.7*exp(-0.7*(x)),col="blue",lwd=2)
```

Prikažite rezultat.

- Primetite da kada smo podelili promenljivu `results` sa našim slučajnim rezultatima sa 0.7, morali smo da pomnožimo gustinu sa 0.7 da bismo to kompenzovali.

  R ima ugrađene komande za generisanje eksponencijalnih slučajnih promenljivih. Unesite

```
results2 <- rexp(10^6,rate=0.7)
lines(density(results2),col="gold",lwd=2)
```

  Da li komanda R `rexp` generiše podatke iz iste raspodele kao metoda negativnog logaritma?

- Da li je ocena kernela gustine tačna kao ranije?

Gamma/Erlang Kada saberemo eksponencijalne slučajne promenljive zajedno, dobijamo *gama* raspodelu. Hajde da pokušamo.

```
results <- replicate(10^5,sum(rexp(3,rate=0.7)))
plot(density(results))
```

Prikažite rezultat.

- Za $X_1, \ldots, X_k$ iid $\mathsf{Exp}(\lambda)$, kažemo da $X_1 + \cdots + X_k = X \sim \mathsf{Gamma}(k, \lambda)$, gde X ima gustinu

$$f_X(s) = \frac{\lambda^k s^{k-1} \exp(-\lambda s)}{\Gamma(a)} \mathbb{1}(s \geq 0).$$

Ovde se $\Gamma(a)$ zove *gama funkcija*. Korisna činjenica je da kada je a ceo broj, $\Gamma(a) = (a-1)!$. Testirajte ovu činjenicu sa

```
integrate 4^6*s^5*exp(-4*s) from 0 to infinity
```

u Wolfram Alpha. Šta je rezultat? Da li je rezultat faktorijel celog broja? (Na primer, ako je vaš rezultat bio 24, onda je $24 = 4!$.)

- Komanda za direktno generisanje gama slučajnih promenljivih u R je `rgamma`. Iskoristite ovu komandu da generišete 10^6 iid Gamma$(3, 0.7)$ slučajnih promenljivih i iscrtajte ocenu kernela gustine.

Drugi deo

- **Beta** Prva raspodela koju ćemo razmotriti je *Beta* raspodela, koja dolazi iz *statistika poretka* uniformnih slučajnih promenljivih nad $[0, 1]$. Za dat skup slučajnih promenljivih $X_1, \ldots, X_n$, statistike poretka su isti ti brojevi, poređani po redu. Koristimo indekse okružene zagradama za označavanje redosleda statistike. To jest,

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

  Tako, na primer, `u <-runif(4)` generiše $U_1, \ldots, U_4$ iid uniformne nad $[0, 1]$. Zatim `sort(u)` generiše njihove statistike poretka. Isprobajte ovo i prikažite svoje četiri statistike poretka $U_{(1)}, U_{(2)}, U_{(3)}, U_{(4)}$.

- Da bismo dobili statistiku i-tog reda iz vektora v, koristimo `sort(v)[i]`. Stavljajući sve ovo zajedno, hajde da generišemo neke bete:

```
results <- replicate(10^5,sort(runif(10))[4])
plot(density(results))
```

  Skicirajte rezultat.

- Imajte na umu da gustina dostiže vrhunac na oko $4/10$ i to je zato što smo koristili statistiku četvrtog reda od 10 uniformnih. Pokušajte sa statistikom sedmog reda od 10 uniformnih i skicirajte rezultujuću gustinu.

- Ako koristimo i-tu statistiku poretka od n uniformnih (to jest $X = U_{(i)}$) onda je

$$X \sim \text{Beta}(i, n-i+1)$$

  sa gustinom

$$f_X(s) = \frac{x^{i-1}(1-x)^{n-i}}{B(i, n-i+1)} \mathbb{1}(x \in [0, 1]).$$

  gde je B funkcija koja daje normalizujuću konstantu i naziva se *beta funkcija*. Imajte na umu da dok je malo grčko slovo beta (β) lako razlikovati od malog rimskog slova b, veliko grčko slovo beta (B) izgleda baš kao veliko rimsko slovo B. Koristite Wolfram Alpha da izračunate $B(7, 10-7+1)$ sa

```
integrate x^(7-1)*(1-x)^(10-7) from 0 to 1
```

  Koliko je $B(7, 10-7+1)$?

- Komanda za direktno generisanje beta slučajnih promenljivih u R je `rbeta`. Koristite ovu komandu da generišete 10^6 $\text{Beta}(7, 4)$ slučajnih promenljivih i nacrtajte ocenu kernela gustine.

Sledeća raspodela koju razmatramo je *normalna* raspodela, takođe poznata i kao *Gausova*.

- Unesite

  ```
  z <- rnorm(10^6)
  plot(density(z))
  ```

  i skicirajte rezultat.

- Ovo se zove *standardna normalna raspodela*. Ako skaliramo i pomerimo podatke, dobijamo drugačiju normalnu raspodelu.

  ```
  plot(density(3*z+10))
  ```

  Sada bi vrh trebalo da bude centriran nad 10, a ne nad 0. Skicirajte rezultat.

- Ispostavlja se da je množenje standardne normalne sa 3 isto što i sabiranje 9 nezavisnih standardnih normalnih zajedno. Unesite

  ```
  z2 <- 10 + replicate(10^5,sum(rnorm(9)))
  lines(density(z2),col="blue")
  ```

  (Korišćenjem `lines` umesto `plot` ovde dodajemo crtež u postojeći plot umesto da počnemo ispočetka.) Da li nova ocena kernela gustine izgleda kao stara?

- Hajde sada da pogledamo kvadrat standardne normale. Ovo se zove *hi-kvadrat raspodela*. Takođe se piše kao χ^2, pošto je χ grčko slovo hi. Unesite

  ```
  plot(density(z^2))
  ```

  i skicirajte rezultat.

- χ^2 raspodela je povezana sa gama raspodelom. Probajte

```
lines(density(rgamma(10^6,shape=1/2,rate=1/2)))
```

  Šta biste rekli koja je to veza?

Za sve raspodele (uniformne, eksponencijalne, gama/Erlang, beta, normalne) pogledali smo grafikon kernela gustine i bio je dobar. Međutim, ovo nije uvek slučaj. U ovom delu vežbi razmotrićemo situaciju u kojoj dijagram kernela gustine ne uspeva. Naime, kada funkcija gustine u repovima opada samo polinomijalno, a ne eksponencijalno.

- **Koši (Cauchy)** Grafikon kernela gustine u R podrazumevano se služi normalnom gustinom. Ovo dobro funkcioniše za slučajne promenljive gde gustina brzo opada (poput normalnih, gama, beta i eksponencijalne), ali ne tako dobro kada gustina polako opada (kao Košijeve). Da bismo videli ovaj efekat, prvo nacrtajmo gustinu standardnog Košija.

```
x <- seq(-10,10,by=0.1)
plot(x,1/pi/(1+x^2),type="l",col="blue",lwd=2)
```

  Skicirajte rezultat.

- Hajde sada da uradimo ocenu kernela gustine. Koši slučajne promenljive dolaze od uzimanja tangente uniformnog broja nad $[-\tau/4, \tau/4]$.

```
results <- tan(pi*runif(10^6)-pi/2)
plot(density(results))
```

  Skicirajte rezultat.

- Zašto izgledaju tako drugačije? Zato što Koši repovi opadaju samo polinomijalno i kažemo da imaju *težak rep*. Raspodele sa teškim repom imaju mnogo veoma velikih i veoma malih vrednosti, što zbunjuje dijagram kernela gustine.

  Još jedan primer raspodele sa teškim repom je $X = 1/U$, gde $U \sim \text{Unif}([0, 1])$. Unesite

```
results <- 1/runif(10^6)
plot(density(results))
```

  i skicirajte rezultat. Opet prisustvo izuzetno velikih vrednosti sve poremeti i gura sve u jedan šiljak.

Sada ćemo pogledati odnos između beta i gama funkcija.

- Ispostavlja se da su beta funkcija i gama funkcija povezane. Generalno:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

  Pošto je $\Gamma(a) = (a-1)!$ za cele brojeve a, to čini da $B(a,b)$ izgleda kao inverz od binomijalnog koeficijenta. Podsetimo se da za cele brojeve a, $\Gamma(a) = (a-1)!$. Koristite to da pronađete $\Gamma(7),\ \Gamma(10-7+1),\ \Gamma(11)$ i $B(7, 10-7+1)$.

Glava 37

Očekivana vrednost

Sažetak Ove vežbe će vas upoznati sa srednjim vrednostima slučajnih promenljivih i jakim zakonom velikih brojeva

- Pretpostavimo da imamo četiri vrednosti $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 1, 4, 2)$. Tada su prva četiri proseka uzorka

$$5/1,\ (5+1)/2,\ (5+1+4)/3,\ (5+1+4+2)/4.$$

  Možete ih pronaći pomoću funkcije **cumsum** (kumulativni zbir) u R. Unesite

```
x <- c(5,1,4,2)
cumsum(x)
```

  i prikažite rezultat.

- Podelite ove brojeve sa $1, 2, 3$ i 4 sa

```
x <- c(5,1,4,2)
cumsum(x)/1:4
```

- Proverite da li je poslednji unos prosek četiri broja sa

```
mean(x)
```

- Sada probajmo isto za 1000 uniformnih nad $[0, 1]$.

```
u <- runif(1000)
y <- cumsum(u)/1:length(u)
plot(y,type="l",col="blue")
```

Napravite grubu skicu rezultata.

- Pogledajte samo poslednju polovinu vrednosti sa

```
plot(y[501:1000],type="l",col="blue")
```

  Skicirajte rezultat.

- Sada generišete 10^6 uniformnih i ponovo nacrtajte proseke uzorka. Skicirajte rezultat.

- Ovo je primer skupa proseka uzorka koji konvergiraju određenoj vrednosti. Ta vrednost je *srednja vrednost* (tj. *očekivana vrednost*, *očekivanje* ili *prosek*) slučajne promenljive. Pošto uniformne imaju neprekidnu gustinu, možemo ih pronaći pomoću formule

$$\mathbb{E}[U] = \int_{u \in \mathbb{R}} u \mathbb{1}(0 \leq u \leq 1)\, du,$$

  gde je u prisutno jer pokušavamo da pronađemo srednju vrednost za U, a $\mathbb{1}(0 \leq u \leq 1)$ je gustina uniformne slučajne promenljive.

  U Wolfram Alpha, funkcija indikator je `Boole`. Unesite

```
integrate x*Boole(0 <= x <= 1) from -infinity to infinity
```

  u Wolfram Alpha i prosledite rezultat .

- Naravno, mogli bismo olakšati Wolfram Alpha korišćenjem funkcije indikatora da promenimo granice integracije. Unesite

```
integrate x from 0 to 1
```

  u Wolfram Alpha i prosledite rezultat. .

- Sada hajde da ocenimo $\mathbb{E}[U^2]$ in R.

```
mean(u^2)
```

  Zabeležite rezultat.

- Sada probajte odgovoarajući integral

$$\int_{x\in\mathbb{R}} x^2 \mathbb{1}(0 <= x <= 1)\, dx$$

  u Wolfram Alpha i zabeležite rezultat.

- Činjenica da prosek uzorka od $U_1^2, U_2^2, \ldots, U_n^2$ konvergira $\mathbb{E}[U^2]$ naziva se *Jaki zakon velikih brojeva*, ili JZVB, i jedna je od glavnih teorema u teoriji verovatnoće.

  Kažemo da je slučajna promenljiva U *integrabilna* ako je $\mathbb{E}[|U|]$ konačan broj. (To će uvek biti ili konačni nenegativan broj ili ∞.) Unesite sledeće i skicirajte rezultat:

```
w <- 1/runif(1000)
plot(cumsum(w)/1:length(w),type="l",col="blue")
```

- Probajte ponovo, ali sa 10^6 uzoraka od $1/U$.

- Grafici pokazuju da dolazi do naglog porasta praćenog sporim padom. Ako su skokovi veći od opadajućih delova, onda JZVB neće važiti.

  Da bismo stekli predstavu o tome zašto dolazi do ovih skokova, pogledajmo četiri najveće vrednosti w:

```
sort(w)[(length(w)-3):length(w)]
```

  Zabeležite ove vrednosti.

- Imajte na umu da je promena ukupnog proseka uzorka uzrokovana najvećom od ovih vrednosti vrednost podeljena sa 10^6. Koliko je samo ova jedna vrednost promenila prosek uzorka?

- Kada slučajna promenljiva povremeno ima ove super velike vrednosti, ona nastavlja da čini ukupni prosek uzorka sve većim i većim. Jedan od načina da vidite da li se to dešava je da pogledate integral koji daje $\mathbb{E}[|1/U|]$.

  Koliko je

$$\int_{u\in\mathbb{R}} (1/u)\mathbb{1}(u \in [0,1])\, du?$$

Drugi deo

- **Košijeva raspodela** U primeru za $1/U$, $|1/U| = 1/U$ jer je uvek pozitivno. Drugačiji primer je Košijeva raspodela, koja ima gustinu

$$f_X(s) = \frac{2}{\tau} \cdot \frac{1}{1+s^2}.$$

Prvo nacrtajmo gustinu Košija, a onda i normalnu raspodelu radi poređenja

```
x <- seq(-5,5,by=0.1)
plot(x,dnorm(x),type="l",col="red")
lines(x,dcauchy(x),type="l",col="blue")
```

Skicirajte rezultat.

- Košijeva i normalna raspodela imaju slične oblike, razlika je u tome što je Košijeva malo niža blizu 0 i veći deo verovatnoće je gurnut ka repovima. Ali ta verovatnoća u repovima čini svu razliku!

Prvo hajde da probamo JZVB za normalne slučajne promenljive, ponavljajući eksperiment četiri puta

```
replicate(4,mean(rnorm(10^6)))
```

Šta je rezultat?

- Na osnovu ovih rezultata, da li biste rekli da JZVB važi za normalne slučajne promenljive?

- Pogledajmo srednju vrednost 10^6 Košijevih slučajnih promenljivih četiri puta.

```
replicate(4,mean(rcauchy(10^6)))
```

Sačuvajte rezultate.

- Na osnovu ovih rezultata, da li biste rekli da JZVB važi za Koši slučajne promenljive?

- Hajde sada da generišemo 10^6 Košijevih slučajnih promenljivih i pogledamo prosek uzorka kako njegova veličina raste.

```
r <- rcauchy(10^6)
plot(cumsum(r)/1:length(r),type="l",col="blue")
```

Skicirajte grafik.

- Koši slučajna varijabla će ponekad skočiti naviše, a ponekad naniže. To je zato što njegova gustina omogućava i velike pozitivne i velike negativne brojeve. Koristite

  ```
  max(r)
  min(r)
  ```

  da pronađete najveću i najmanju vrednost za Košijeve i prijavite svoje rezultate.

- **Uzorkovanje po značajnosti (Importance Sampling)** U Monte Karlo simulaciji, konstruišemo slučajnu promenljivu čija je srednja vrednost jednaka ciljnoj vrednosti.

  Razmotrimo integral
  $$\int_0^1 \exp(-x^{1.5})\, dx.$$
  Izračunajte integral na četiri značajne cifre koristeći Wolfram Alpha.

- Hajde sada da napravimo slučajnu promenljivu sa ovim integralom kao njegovom srednjom vrednošću. Počnite sa U koji ima $\mathbb{1}(x \in [0,1])$ kao svoju gustinu. Onda
  $$\mathbb{E}[\exp(-U^{1.5})] = \int_0^1 \exp(-x^{1.5})\, dx,$$
  pa bi sledeće trebalo da aproksimira integral.

  ```
  u <- runif(10^3)
  mean(exp(-u^(1.5)))
  ```

  Uradite ovo četiri puta (da vidite kakvu varijaciju u svojim odgovorima dobijate) i prikažite rezultate.

- Ova ideja korišćenja funkcije slučajne promenljive za dobijanje integrala naziva se *uzorkovanje po značajnosti*. Uopšteno govoreći, uzorkovanje po značajnosti bolje funkcioniše kada je gustina slučajne promenljive što je moguće bliža integrandu. Gustina uniformne je ravna linija koja uopšte ne odgovara obliku $\exp(-x^{1.5})$.

  Nešto bliže bi bilo $\exp(-x)$, ali takođe želimo da gustina bude pozitivna samo nad $[0,1]$. Prema tome, ono što bismo želeli je eksponencijalna slučajna promenljiva sa stopom 1 uslovljena da leži u $[0,1]$.

Podsetimo se da se eksponencijalna slučajna promenljiva može pronaći korišćenjem

$$T = -\ln(U)$$

Ako je $T \in [0,1]$, šta vam to govori o U? Verovatnoća da $T \sim \text{Exp}(1)$ pada u $[0,1]$ je

$1 - \exp(-1)$. Neka je $W = [T | T \in [0,1]]$. Onda

$$f_W(s) = \frac{\exp(-s)}{1 - \exp(-1)} \mathbb{1}(s \in [0,1]).$$

Da bi očekivanje odgovaralo integralu, koristimo

$$\begin{aligned} I &= \int_{s \in \mathbb{R}} (1 - \exp(-1)) \exp(-s^{1.5} + s) \frac{\exp(-s)}{1 - \exp(-1)} \mathbb{1}(s \in [0,1]) \, ds \\ &= \mathbb{E}[(1 - \exp(-1)) \exp(-W^{1.5} + W)]. \end{aligned}$$

Hajde da sve ovo spojimo i napravimo naše nove slučajne promenljive.

```
u <- runif(10^3,min=exp(-1),max=1)
w <- -log(u)
plot(density(w))
x <- seq(0,1,by=0.01)
lines(x,exp(-x)/(1-exp(-1)),type="l",col="red")
```

Skicirajte rezultat.

- Sada da sve sastavimo zajedno.

```
u <- runif(10^3,min=exp(-1),max=1)
w <- -log(u)
mean((1-exp(-1))*exp(-w^(1.5)+w))
```

Ponovite ceo ovaj proces četiri puta i zabeležite rezultat.

- Da li ste videli više ili manje varijacija nego kada ste koristili uniformne promenljive nad $[0,1]$?

- Da vidimo zašto ovo ima manje varijacija, hajde da nacrtamo vrednosti koje $(1 - \exp(-1) * \exp(-W^{1.5} + W)$ može da uzme.

```
x <- seq(0,1,by=0.01)
y <- (1-exp(-1))*exp(-x^1.5+x)
plot(x,y,type="l",col="blue")
```

Skicirajte rezultat.

- Pogledajmo maksimalnu relativnu grešku koja može nastati. Unesite

  ```
  max(y)/min(y) - 1
  ```

  Šta je rezultat?

- Pokušajmo sada isto za ocenu koristeći uniformne.

  ```
  y2 <- exp(-x^1.5)
  max(y2)/min(y2)-1
  ```

  Prijavite maksimalnu relativnu grešku za uniformne.

Glava 38

Zajedničke gustine

Sažetak U ovim vežbama ćemo prikazati tačke direktno uzete iz raspodele da bismo vizuelizovali gustinu u jednoj i dve dimenzije. Takođe ćete naučiti kako da koristite *pomoćnu slučajnu promenljivu* da biste dobili uzorke iz različitih gustina.

Prvi deo

- Podsetimo se da je f_X gustina od X, ako je za svako A,

  $$\mathbb{P}(X \in A) = \int_{x \in A} f_X(x)\, d\mu = \int_x \mathbb{1}(x \in A) f_X(x)\, dx.$$

  Dakle, kad god je gustina velika, očekujemo više tačaka u toj oblasti, a kada je gustina mala, očekujemo manje tačaka u tom regionu.

  Normalna gustina $f_s = \tau^{-1/2} \exp(-s^2/2)$ je velika u sredini, u 0 i manja u repovima, tako da očekujemo da će uzorci biti koncentrisani prema sredini. Unesite

  ```
  x <- rnorm(20)
  stripchart(x)
  ```

  Dajte grubu skicu rezultata.

- Sada pokušajte isto za 100 tačaka i skicirajte rezultat.

- Košijeva raspodela ima gustinu $2\tau^{-1}(1 + s^2)^{-1}$. Takođe je velika u sredini, ali ima mnogo veće repove, tako da je mnogo veća verovatnoća da će imati *autlajere* koji su veoma veliki ili veoma mali. Unesite

  ```
  x <- rcauchy(20)
  stripchart(x)
  ```

  i skicirajte rezultate.

- Da se vratimo sada uniformnima nad $[0,1]$. Unesite

  ```
  x <- runif(1000)
  plot(density(x))
  ```

  Skicirajte grafikon.

- Sada ćemo koristiti *pomoćnu* promenljivu da uzorkujemo iz gustine

  $$f_X(s) \propto s(1-s)\mathbb{1}(s \in [0,1]).$$

  Skicirajte ovu funkciju, prisetivši se da možete da nacrtate funkcije u Wolfram Alpha koristeći komandu `plot`.

- Imajte na umu da najveća vrednost ove gustine može biti $1/4$ za $s = 1/2$. Dakle, moja pomoćna slučajna promenljiva će takođe biti uniformna od 0 do $1/4$. Unesite sledeće

  ```
  y <- 0.25*runif(length(x))
  plot(x,y)
  ```

  Ovo daje tačke koje su uniformne nad $[0,1] \times [0,1/4]$. Sada ćemo se ograničiti na tačke u kojima je $y < x(1-x)$.

  ```
  keep <- which(y < x*(1-x))
  plot(x[keep],y[keep])
  ```

  Skicirajte ovu oblast po kojoj su tačke (x, y) uniformne.

- Pošto smo počeli sa `(x,y)` uniformno nad $[0,1] \times [0,1/4]$, i zadržali tačke koje upadaju u $A = \{(x,y) : x \in [0,1], y \in [0, x(1-x)]\}$, onda su `(x[keep],y[keep])` uniformne nad A.

  Površina $[0,1] \times [0,1/4]$ je $1/4$. Dakle, procenat tačaka iz $[0,1] \times [0,1/4]$ koje su pale u region A puta $1/4$ daje ocenu površine A.

  ```
  0.25*length(keep)/length(x)
  ```

  i prikažite rezultat.

- Sada nađite $\int_{s\in\mathbb{R}} s(1-s)\mathbb{1}(s\in[0,1])\,ds$ egzaktno koristeći Wolfram Alpha i uporedite sa gornjom ocenom.

- U dve i više dimenzija takođe imamo gustine. Ponovo možemo uzeti slučajne uzorke da bismo stekli predstavu o tome kako različite gustine izgledaju u praksi. Na primer, pokušajte

  ```
  x <- runif(100)
  y <- runif(100)
  plot(x,y)
  ```

  i skicirajte rezultat.

- Sada napravimo skup vrednosti koje imaju gustinu

  $$f_{(X,Y)}(x,y) \propto (x+2y)\mathbb{1}(\{(x,y), x\in[0,1], y\in[0,1]).$$

  Ponovo ćemo koristiti pomoćnu slučajnu promenljivu `z` da bismo ovo postigli. Najveća vrednost ove funkcije može biti 3, tako da će `z` biti unoiformna nad $[0,3]$.

  ```
  z <- 3*runif(length(x))
  keep <- which(x+2*y<z)
  plot(x[keep],y[keep])
  ```

  Opišite rečima razliku koju vidite između `plot(x[keep],y[keep])` i `plot(x,y)`.

- Hajde da napravimo veći skup uzoraka iz ove distribucije.

  ```
  n <- 10^6
  x <- runif(n)
  y <- runif(n)
  z <- 3*runif(n)
  keep <- which(z < x + 2*y)
  ```

  Sada hajde da procenimo normalizujuću konstantu za gustinu tako što ćemo pomnožiti zapreminu od $[0,1]\times[0,1]\times[0,3]$ procentom (x,y,z) koje smo sačuvali.

  ```
  3*length(keep)/n
  ```

  Prikažite svoj rezultat. (Zapamtite, gustina se *deli* ovim brojem da bi se dobila normalizovana gustina.)

- Sada pronađite normalizujuću konstantu egzaktno koristeći Wolfram Alpha i uporedite sa svojom ocenom.

- Proverimo i nezavisnost.

```
print(sum(x[keep] < 0.5)/length(keep))
print(sum(y[keep] < 0.5)/length(keep))
print(sum((x[keep] < 0.5) & (y[keep] < 0.5))/length(keep))
```

  Prikažite svoju osenu.

- Da li biste rekli da je $\mathbb{P}(X < 1/2)\mathbb{P}(Y < 1/2) = \mathbb{P}(X < 1/2, Y < 1/2)$?

- Pronađite ove vrednosti tačno koristeći Wolfram Alpha i uporedite ih sa svojim ocenama. (Ne zaboravite da u gustinu uključite normalizujuću konstantu koju ste pronašli!)

Drugi deo

- Korelacija
$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}{\mathrm{SD}(X)\,\mathrm{SD}(Y)}$$
je 0 za slučajne promenljive koje su nezavisne. Ako su X i Y nezavisne, onda je $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$, i
$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|Y]] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$
Pokušajte ovo za
```
z1 <- rnorm(10^6)
z2 <- rnorm(10^6)
mean(z1*z2)-mean(z1)*mean(z2)
```
Prikažite svoj rezultat.

- Možemo formirati više slučajnih promenljivih koje *jesu* korelirane tako što ćemo uzeti linearnu kombinaciju `z1` i `z2`. Unesite
```
z3 <- z1 + 2*z2
z4 <- z1 - z2
```
Imajte na umu da ako dodate ili oduzmete normalne slučajne promenljive, rezultat je i dalje normalna slučajna promenljiva! Testirajte ovo sa
```
plot(density(z3))
plot(density(z4))
```
i skicirajte rezultate.

- Sada, `z3` nije potpuno određen `z1` zbog slučajnosti u `z2`, ali kako `z1` raste, tako raste i `z3` u proesku. Odnos rasta je $1-1$, za svaki porast `z1`, prosečna vrednost `z1` raste za isti iznos. Proverite ovo procenom kovarijanse sa
```
mean(z1*z3)-mean(z1)*mean(z3)
```
Prikažite svoj rezultat.

- Kada `z2` raste, prosek `z1` raste za dvostruku promenu u `z2`. Pogledajmo sada njihovu kovarijansu.
```
mean(z3*z2)-mean(z3)*mean(z2)
```

Prikažite svoj rezultat.

- Standardna statistička procena za kovarijansu je zapravo malo drugačija od one koju smo koristili. Unesite

  ```
  cov(z2,z3)
  ```

  Kakav je rezultat u poređenju sa ocenom koju smo ranije napravili?

- Naravno, kovarijansa je simetrična funkcija. Unesite

  ```
  cov(z3,z2)
  ```

  Da li ste dobili istu ocenu?

- Da bismo prešli sa kovarijanse na korelaciju, moramo podeliti sa standardnim devijacijama varijabli. Unesite

  ```
  cov(z1,z3)/sd(z1)/sd(z3)
  cov(z2,z3)/sd(z2)/sd(z3)
  ```

  i prikažite rezultate.

- Imajte na umu da pošto je `z3` jače koreliran sa `z2` nego `z1`, ocena korelacije je mnogo jača. R ima skraćenu komandu za pronalaženje korelacije, baš kao što ima skraćenicu za ocenu kovarijanse. Unesite

  ```
  cor(z1,z3)
  cor(z2,z3)
  ```

  i uporedite rezultate sa onim što ste prethodno pronašli.

- Sada pogledajmo kako izgledaju pozitivno korelirani uzorci kada se nacrtaju. Unesite

  ```
  plot(z1[1:100],z3[1:100])
  ```

  i skicirajte rezultat,

- Kovarijansa `z1` i `z3` je dva puta veća. Unesite

  ```
  plot(z2[1:100],z3[1:100])
  ```

  i skicirajte rezultat.

- Koja je razlika između ovog grafikona i prethodnog?

- Sada obraćamo pažnju na slučajne promenljive koje su negativno korelirane.

  ```
  cov(z2,z4)
  cor(z2,z4)
  ```

  Prikažite svoje rezultate.

- Zatim pokušajte da skicirate prvih 100 tačaka u nizovima. Unesite

  ```
  plot(z2[1:100],z4[1:100])
  ```

  i skicirajte rezultat.

- Prisetimo se da je korelacija simetrična, tako da zamena promenljivih daje slične rezultate. Unesite

  ```
  plot(z4[1:100],z2[1:100])
  ```

  i skicirajte rezultat.

Glava 39

Transformacije slučajnih promenljivih

Sažetak

- Rotacija tačaka $\mathbb{R}^2$.
- Rotaciona invarijantnost normalne raspodele.
- Funkcije u R.

Prvi deo Prvo ćemo naučiti kako da rotiramo tačke u ravni x, y.

- Za dat vektor tačaka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

  matrica rotacije $R(t)$ je

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

  Primetite da je Jakobijan matrice 1: to znači da ne menja površine regiona. Onda za tačku $v \in \mathbb{R}^2$,

$$R(t)v$$

  je tačka v rotirana za ugao t u smeru suprotnom od skazaljki na satu.

  U R, funkcije `cos` i `sin` uzimaju argument u radijanima. Možete da konvertujete ugao od 20 stepeni u radijane u R sa `t <-20*2*pi/360`. Zapišite matricu rotacije za t jednako 20 stepeni.

- Sada pomnožite ovu matricu sa kolona vektorom da biste pronašli tačku koja je $(0.5, 0.5)$ rotirana za 20 stepeni suprotno od kazaljke na satu. Nacrtajte prvobitnu tačku i rotiranu tačku.

- U R, jedan od načina na koji možemo da kreiramo matrice pomoću funkcije `rbind` (skraćeno od *row bind*) ili pomoću funkcije `cbind` (skraćeno od *column bind*). Prisetite se da možemo kreirati vektore sa `c`. Tada možemo povezati ove vektore na sledeći način.

```
t <- 20*2*pi/360
R <- rbind(c(cos(t),-sin(t)),c(sin(t),cos(t)))
x <- cbind(c(0.5,0.5))
```

  Prikažite vrednosti od `R` i `x`.

- Operator množenja matrica u R je `%*%`. Unesite

```
R%*%x
```

  i prikažite rezultat.

- Pogledajmo sada kako funkcioniše rotaciona simetrija standardnih normalnih slučajnih promenljivih. Unesite

```
z1 <- rnorm(10^6)
z2 <- rnorm(10^6)
plot(density(z1),col="gold")
lines(density(z2),col="blue")
```

  i skicirajte rezultate.

- Sada zarotirajmo sve ove tačke za 20 stepeni ulevo.

```
A <- rbind(z1,z2)
B <- R%*%A
```

  Ucrtajmo prvih pet tačaka, početne i rotirane tačke.

```
plot(A[1,1:5],A[2,1:5],xlim=c(-3,3),ylim=c(-3,3))
points(B[1,1:5],B[2,1:5],col="blue")
```

- Sada pogledajmo gustine rotiranih tačaka. Oznaka `B[1,]` daje prvu vrstu matrice B, dok `B[2,]` daje drugu vrstu.

  ```
  plot(density(B[1,]),col="gold")
  lines(density(B[2,]),col="blue")
  ```

  Skicirajte rezultat.

- **Dodatak: funkcije u R** Do sada smo se ograničavali na korišćenje ugrađenih funkcija u R, ali u stvari, možemo kreirati sopstvene funkcije!

  Prilikom kreiranja naše matrice rotacije, koristili smo vrednost t koja se može promeniti. U R, najbolji način da se to uradi je funkcijom. Unesite sledeće.

  ```
  rotate <- function(deg) {t <- deg*2*pi/360; return(rbind(c(cos(
      t),-sin(t)),c(sin(t),cos(t)))) }
  rotate(20)
  ```

  Funkcija rotate prvo izračunava vrednost `t` za dati argument `deg`, a zatim vraća odgovarajuću matricu korisniku. Izvršava ove dve linije svaki put kada se funkcija `rotate` pozove sa argumentom.

  Komanda `rotate(20)` bi trebalo da vrati vašu matricu rotacije za 20 stepeni. Koristeći funkciju `rotate`, izračunajte matricu rotacije za 110 stepeni.

- Proverite da li vaša nova matrica rotacije radi ono što treba izračunavanjem $(1,0)$ i $(0,1)$ rotiranih za 110 stepeni.

- Možemo koristiti funkciju da pretvorimo kartezijanske koordinate u polarne koordinate. Unesite sledeću funkciju.

  ```
  car2pol <- function(v) {
      x <- v[1]
      y <- v[2]
      r <- sqrt(x^2+y^2)
      t <- atan2(y,x)
      return(c(r,t))
  }
  ```

Sada `car2pol(c(1,2))` vraća polarne koordinate za tačku $(1, 2)$. Pronađite polarne koordinate za tačku $(-2, 6)$.

- Sada hajde da pronađemo polarne koordinate kada nacrtamo dve standardne iid normalne slučajne promenljive. Ponovićemo eksperiment 1000 puta komandom `replicate`.

```
results <- replicate(1000,car2pol(rnorm(2)))
```

Proverite dimenzije `results` komandom `dim`.

```
dim(results)
```

Koje su dimenzije `results`?

- Prva koordinata su vrednosti R, dok je druga koordinata vrednosti θ.

```
plot(density(results[2,]))
```

Skicirajte rezultat. (Imajte na umu da su ovde vrednosti θ forsirane da leže u $[-\tau/2, \tau/2]$.)

- Sada skicirajmo gustinu rastojanja od koordinatnog početka i uporedimo sa Rejlijevom gustinom.

```
plot(density(results[1,]))
x <- seq(0,4,by=0.1)
lines(x,x*exp(-x^2/2),col="blue",lwd=2)
plot(density(results[1,]))
```

Skicirajte rezultat.

Drugi deo

- Ako uzorkujemo $Z_1, \ldots, Z_d$ iid $\mathsf{N}(0, 1)$, tada tačke imaju pravac koji je uniforman po svim mogućim pravcima. Dakle, možemo napraviti funkciju koja generiše uniformno sa površine sfere na sledeći način.

```
sphere.surface <- function(d) {
    v <- rnorm(d)
    return(v/sqrt(sum(v^2)))
}
```

Ovo se zove *Harova mera* na površini sfere. Hajde da generišemo 10^6 od ovih i nacrtamo prvih 100.

```
results2 <- replicate(10^6,sphere.surface(2))
plot(results2[1,1:100],results2[2,1:100])
```

Skicirajte rezultat.

- Hajde sada da nacrtamo gustinu x vrednosti

```
plot(density(results2[1,])))
```

Skicirajte rezultat.

- Hajde sada da pređemo na površinu 3-dimenzionalne sfere.

```
results3 <- replicate(10^6,sphere.surface(3))
plot(density(results3[1,])))
```

Pretpostavite koja je raspodela od X ako je (X, Y, Z) uniformno po površini 3-dimenzione sfere.

- Zbog simetrije će X, Y i Z imati iste raspodele. Zato što leže na površini sfere mora biti $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Dakle nisu nezavisne. Međutim, ako su na primer date X i Y, onda je Z podjednako verovatno jednako $\sqrt{1 - X^2 - Y^2}$ i $-\sqrt{1 - X^2 - Y^2}$. Dakle $\mathbb{E}[Z|X, Y] = 0$ za sve X i Y, što znači da su svi (X, Y), (X, Z) i (Y, Z) nekorelirani. Proverite to ovako

```
cor(results3[1,],results3[2,])
cor(results3[1,],results3[3,])
cor(results3[2,],results3[3,])
```

i prikažite rezultat.

- Sada generišite 10^6 tačaka uniformno sa površine 4-dimenzionalne sfere i nacrtajte ocenu kernela gustine prve koordinate.

  Kada idemo u više dimenzije, sve je veća verovatnoća da će prva koordinata biti blizu 0. Generalno, kada se nalazite na površini sfere velike dimenzije, vrlo je verovatno da ćete imati sve koordinate veoma blizu 0. Naravno, one su zavisne, pa ako su $X_1, \ldots, X_{d-1}$ svi 0, onda X_d mora biti jednako 1.

- Sada pretpostavimo da su (U_1, U_2) iid uniformne nad $[0, 1]$. Hajde da generišemo njih 1000 i skiciramo grafikon.

```
u1 <- runif(1000)
u2 <- runif(1000)
plot(u1,u2)
```

- Hajde sada da ih transformišemo koristeći $W_1 = U_1 - U_2$, $W_2 = U_1 + U_2$. Tada je Jakobijan ove transformacije konstanta, tako da su transformisane varijable i dalje uniformne. Testirajte ovo sa

```
plot(u1-u2,u1+u2)
```

  Skicirajte rezultat.

- Ovo pruža još jedan primer slučajnih promenljivih koje su zavisne (vrednosti koje W_2 može da uzme zavise od vrednosti W_1), ali koje nisu u korelaciji. Proverite ovo sa

```
cor(u1-u2,u1+u2)
```

  Prikažite rezultat.

- **Generatrise momenata** Podsetimo se da je za slučajnu promenljivu, X, funkcija generatrisa momenata $\text{mgf}_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)]$ ukoliko je ovo konačno. Na primer, ako je $X \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3\})$, onda je

$$\text{mgf}_X(t) = (1/3)[e^t + e^{2t} + e^{3t}].$$

Dalje, za $X_1, \ldots, X_n$ iid $\mathsf{Unif}(\{1,2,3\})$,

$$\mathrm{mgf}_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \mathrm{mgf}_X(t)^n.$$

Naći

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{20} = 40)$$

koristeći funkciju generatrisu momenata i Wolfram Alpha.

- Koristeći Wolfram Alpha, naći generatrisu momenata za $T \sim \mathsf{Exp}(1)$, sa gustinom $f_T(s) = \exp(-s)\mathbb{1}(s \geq 0)$. Prisetimo se da je

  $$\mathrm{mgf}_T(t) = \mathbb{E}[\exp(tT)] = \int_s \exp(ts) f_T(s)\, ds.$$

  Prikažite rezultat.

- Koja je generatrisa momenata za $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ gde su T_i iid $\mathsf{Exp}(1)$?

- Naći generatrisu momenata za G sa gustinom $(s^4/24)\exp(-s)\mathbb{1}(s \geq 0)$.

- Da li G i $T_1 + \cdots + T_5$ imaju istu gustinu?

Glava 40

Diskretne raspodele

Sažetak Ove vežbe će vas uvesti u osnovne diskretne raspodele.

Prvi deo

- Počnimo sa najjednostavnijom raspodelom, *Bernulijevom* ili *indikatorskom* slučajnom promenljivom. Za $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$, $B = \mathbb{1}(U \leq p)$ je Bernulijeva slučajna promenljiva sa parametrom p, i pišemo $B \sim \mathsf{Bern}(p)$. Takve promenljive možemo da kreiramo pomoću funkcije `as.integer` zajedno sa logičkim iskazima koji uključuju uniformne. Unesite sledeće.

  ```
  u <- runif(10)
  print(u <= 0.3)
  print(as.integer(u <= 0.3)).
  ```

  Prikažite rezultate.

- Hajde sada da uradimo mnogo ovakvih i napravimo histogram.

  ```
  b <- as.integer(runif(10^6) <= 0.3)
  hist(b)
  ```

  Skicirajte histogram.

- Kada su $B_1, B_2, B_3, \ldots$ niz iid $\mathsf{Bern}(p)$ slučajnih promenljivih, zovemo taj niz *Bernulijev proces*. *Bernulijev proces* se može iskoristiti za dobijanje druge tri važne raspodele. Prva je *binomna* raspodela sa parametrima n i p (pišemo $N \sim \mathsf{Bin}(n,p)$. Ovo je zbir prvih n promenljivih. Na primer, ako je $n = 6$ i $p = 0.3$, onda možete da generišete jednu binomnu koristeći

  ```
  b <- sum(runif(6) <= 0.3)
  ```

Hajde da napravimo 10 iid $\mathsf{Bin}(6, 0.3)$ slučajnih promenljivih.

```
b <- replicate(10,sum(runif(6) <= 0.3))
```

Prikažite rezultate.

- Generišite 10^6 iid $\mathsf{Bin}(6, 0.3)$ i skicirajte histogram rezultata.

- Kao i kod svih ugrađenih raspodela, R može da generiše binomne dodavanjem slova `r` na ime raspodele. Unesite

```
c <- rbinom(10^6,size=6,prob=0.3)
```

i skicirajte histogram rezultata. .

- Sledeća raspodela koja se dobija iz Bernulijevog procesa je *geometrijska*. Ovde ispitujemo $G = \inf\{i : B_i = 1\}$. Tako, na primer, ako Bernulijev proces počinje sa $0, 1, 1, 0, 0, 1$, onda je $\{i : B_i = 1\} = \{2, 3, 6\}$. Pretpostavimo da Bernulijev proces počinje sa $1, 0, 0, 0, 1, 1$. Koji su prvi elementi skupa $\{i : B_i = 1\}$?

- *Infimum* skupa je njegova najveća donja granica. Za podskup celih brojeva to je slično minimumu. Tako je $\inf\{7, 4, 6\} = 4$ i $\inf\{5, 6, 7, \ldots\} = 5$. Jedna razlika između infimuma i minimuma je u tome da $\inf(\emptyset) = \infty$. Imajući to u vidu, naći $\inf\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$?

- Sada ćemo da udružimo ove ideje. Geometrijska slučajna promenljiva je najmanja vrednost i takva da je $B_i = 1$. Formalno $G = \inf\{i : B_i = 1\}$. Tako da ako niz počinje sa $0, 0, 0, 1, 1, 0$, onda je $\{i : B_i = 1\} = \{4, 5, \ldots\}$, i $G = \inf\{i : B_i = 1\} = 4$. Generišite Bernulijev proces i nađite $\{i : B_i = 1\}$ koristeći funkciju `which`.

```
b <- as.integer(runif(10) <= 0.3)
print(b)
which(b == 1)
```

Prikažite rezultat.

- Hajde sada da generišemo neke geometrijske slučajne promenljive koristeći ovaj pristup.

```
g <- replicate(10^4,min(which(runif(100) <= 0.3)))
hist(g,breaks=0:max(g))
```

Skicirajte histogram za g.

- Kao i kod binomnih, R ima ugrađene funkcije za generisanje slučajnih geometrijskih slučajnih promenljivih. Unesite

  ```
  g <- rgeom(10^4,prob=0.3))+1
  hist(g,breaks=0:max(g))
  ```

  i skicirajte rezultat. Primetite da smo morali da dodamo 1 nasumično generisanoj geometrijskoj u R. To je zato što neki autori definišu geometrijsku kao $\inf\{i : B_i = 1\} - 1$. Iako su obe definicije važeće, u ovom kursu ćemo uvek koristiti verziju $\inf\{i : B_i = 1\}$.

- Malo drugačiji način da se napiše definicija geometrijske slučajne promenljive je da se kaže

  $$G = \inf\left\{i : \sum_{j=1}^{i} B_i = 1\right\}.$$

  Zatim možemo proširiti ovu definiciju na *negativnu binomnu raspodelu* sa parametrima k i p, uzimajući

  $$G_k = \inf\left\{i : \sum_{j=1}^{i} B_i = k\right\}$$

  Primetimo da ako su $B_1, B_2, \ldots$ iid $\text{Bern}(p)$ i $G_1, G_2, \ldots$ su iid $\text{Geo}(p)$, i

  $$\begin{aligned} N_n &= B_1 + \cdots + B_n \\ G_k &= G_1 + \cdots + G_k, \end{aligned}$$

  Tada je N_n binomna sa parametrima n i p, a G_k je negativna binomna sa parametrima k i p. Drugim rečima, N_n je slučajni broj uspeha u fiksnom broj pokušaja n, a G_k je slučajni broj pokušaja potrebnih za dobijanje fiksnog broja uspeha k.

  Prvo pokušajte sa $k = 1$, tako da imamo samo geometrijsku slučajnu promenljivu

  ```
  g <- rnbinom(10^4,size=1,prob=0.3)+1
  hist(g,breaks=0:max(g))
  ```

  Skicirajte rezultat.

- Zatim pokušajte da saberete više slučajnih promenljivih

```
g <- rnbinom(10^4,size=4,prob=0.3)+1
hist(g,breaks=0:max(g))
```

Skicirajte rezultat.

Drugi deo

- **Puason** Postoji više načina da opazimo Puasonovu slučajnu promenljivu. Prvo, dobijamo je kao graničnu raspodelu binomne slučajne promenljive, gde je np jednako konstanti μ, dok n ide u beskonačnost (što čini da p teži nuli.) Na primer, neka je $mu = 0$. Unesite

  ```
  n <- rbinom(10^6,size=10,prob=0.3)
  hist(n,breaks=0:max(n))
  ```

  Skicirajte rezultat. Primetite da je najčešća vrednost $3 = (10)(0.3)$

- Sada skicirajte histogram za 10^6 uzoraka iz $\mathsf{Bin}(100, 0.03)$. Primetite da $np = (100)(0.03) = 3$ ostaje isto.

- Sada skicirajte histogram za 10^6 uzoraka iz $\mathsf{Bin}(10000, 0.0003)$. Ponovo $np = (10000)(0.0003) = 3$ ostaje isto.

- Dobijena raspodela je veoma bliska *Puasonovoj* raspodeli sa parametrom $\mu = 3$ (pišemo $N \sim \mathsf{Pois}(\mu)$). Unesite sledeće.

  ```
  n <- rbinom(10^6,size=10,prob=0.3)
  hist(n,breaks=0:max(n))
  ```

  Skicirajte rezultat.

- Puasonove slučajne promenljive su korisne za modelovanje fenomena tamo gde ima mnogo eksperimenata, od kojih svaki ima male šanse za uspeh. Na primer, broj nedostataka u velikoj montažnoj liniji sa vrlo malom šansom za kvar, ili broj grešaka u kucanju reči u knjizi, obično prate Puasonovu raspodelu.

  Izračunajmo verovatnoću da je $N = 0$ za $N \sim \mathsf{Pois}(\mu)$. To je limes od $\mathbb{P}(N_n = 0)$ kada $n \to \infty$ gde je $N_n = \mathsf{Bin}(n, \mu/n)$. Tako je

  $$\mathbb{P}(N = 0) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{0} (\mu/n)^0 (1 - \mu/n)^n.$$

Pronađite ovaj limes. Podsetimo se da eksponencijalna funkcija $\exp$ zadovoljava

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n.$$

- Sada unesite

```
n <- rbinom(10^6,size=10000,prob=0.0003)
mean(n == 0)
```

da proverite vaš račun gore.

- Da proučimo ostatak raspodele, razmotrimo za binomnu slučajnu promenljivu,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(N_n = i+1)}{\mathbb{P}(N_n = i)} &= \frac{\binom{n}{i+1}p^{i+1}(1-p)^{n-(i+1)}}{\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}} \\
&= \frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} \cdot \frac{i!(n-i)!}{n!} \cdot \frac{p}{1-p} \\
&= \frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{p}{1-p}.
\end{aligned}$$

Za $X \sim \mathsf{Bin}(100, 0.6)$, šta je $\mathbb{P}(X = 51)/\mathbb{P}(X = 50)$?

- Sada ocenite ovu vrednost sa

```
n <- rbinom(10^6,size=100,prob=0.6)
mean(n == 51)/mean(n == 50)
```

- Primetite da za $\mu = np$,

$$\frac{\mathbb{P}(N_n = i+1)}{\mathbb{P}(N_n = i)} = \frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{\mu - i(\mu/n)}{(i+1)(1-\mu/n)}.$$

Uzmite limes desne strane kad $n \to \infty$, zadržavajući μ kao konstantu.

- Iskoristite taj limes da nađete

$$\frac{\mathbb{P}(N=2)}{\mathbb{P}(N=1)}$$

  za $N \sim \text{Pois}(3)$.

- Proverite svoju ocenu sa

```
n <- rpois(10^6,lambda=3)
mean(n==2)/mean(n==1)
```

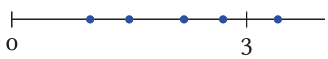
  Prikažite rezultat.

- Dakle, u ovom trenutku znamo kako da pronađemo $\mathbb{P}(N=0)$, i kako da nađemo $\mathbb{P}(N=i+1)/\mathbb{P}(N=i)$. Koristeći

$$\mathbb{P}(N=3)=\mathbb{P}(N=0)\cdot\frac{\mathbb{P}(N=1)}{\mathbb{P}(N=0)}\cdot\frac{\mathbb{P}(N=2)}{\mathbb{P}(N=1)}\cdot\frac{\mathbb{P}(N=3)}{\mathbb{P}(N=2)},$$

  nađite $\mathbb{P}(N=3)$ for $N \sim \text{Pois}(3)$. Inače, ovo je poznato kao teleskopski proizvod.

- **Puasonov proces** Drugi način razmišljanja o Puasonovoj slučajnoj promenljivoj je kao da dolazi iz Puasonovog tačkastog procesa (PPP). U ovom slučaju, ako generišemo standardni PPP (tako da ima stopu 1) na $[0,\infty)$, tada će



  broj tačaka koje spadaju u interval $[0,3)$ imati Puasonovu raspodelu. U standardnom PPP-u, rastojanje do prve tačke je eksponencijalna slučajna promenljiva sa srednjom vrednošću 1.

  Generalno, $\text{Pois}(\mu)$ je raspodela broja tačaka koje padaju u interval $[0,\mu)$.

  Sledeći kôd generiše T_1 prvu tačku u procesu. Ako je T_1 iznad μ, onda je o tačaka palo u $[0,\mu)$. U suprotnom, generišemo broj koji je pao u $[T_1,\mu)$, ili ekvivalentno $[0,\mu-T_1)$, i dodajemo to prvoj tački.

```
rpoisson <- function(mu=3) {
    t1 <- rexp(1)
    if (t1>mu) return(0)
    else {x <- rpoisson(mu-t1); return(1+x)}
}
```

Replicirajte 10^5 iid $\text{Pois}(3)$ uzoraka ovom funkcijom i nacrtajte histogram.

- Kada funkcija poziva samu sebe tokom izvršavanja to se naaziva *rekurzija*, a kada se rekurzija koristi kao deo algoritma simulacije, on postaje algoritam *savršene simulacije*.

  Uopšteno govoreći, rekurzivni algoritmi imaju tendenciju da budu sporiji od nerekurzivnih. Ovo možete da testirate pomoću funkcije `system.time`, koja meri koliko vremena je potrebno za izvršavanje komandi. Unesite

  ```
  system.time(results <- replicate(10^5,rpoisson(3)))
  system.time(results <- rpois(10^5,3))
  ```

  i prikažite rezultate.

Glava 41

Centralna granična teorema

Prvi deo

- Razmotrimo sabiranje gomile slučajnih promenljivih. Na primer, ako saberemo 10 iid uniformnih nad $[0, 1]$ dobićemo slučajnu promenljivu S koja ima očekivanje 5 i varijansu $10/12$.

  ```
  results <- replicate(1000,sum(runif(10)))
  mean(results)
  var(results)
  ```

  Prikažite rezultat.

- Pogledajmo grafikon.

  ```
  plot(density(results))
  ```

  Skicirajte ocenu kernela gustine za S.

- Centralna granična teorema kaže da kako dodajemo sve više i više slučajnih promenljivih zajedno, treba da dobijemo rezultat koji sve više liči na gustinu normalne slučajne promenljive. Od pomoći je standardizacija slučajne promenljive oduzimanjem očekivanja i deljenjem njenom standardnom devijacijom. Rezultat će tada imati očekivanje 0 i standardnu devijaciju 1, i izgledaće slično gustini standardne normalne slučajne promenljive.

  ```
  plot(density((results-5)/sqrt(10/12)))
  x <- seq(-2,2,by=0.1)
  lines(x,dnorm(x),lwd=2,col="blue")
  ```

Skicirajte rezultat.

- Hajde sada da pokušamo istu stvar sa eksponencijalnom slučajnom promenljivom parametra 2.

```
results2 <- replicate(1000,sum(rexp(10,rate=2)))
plot(density((results-10*1/2)/sqrt(10*(1/2)^2)))
lines(x,dnorm(x),lwd=2,col="blue")
```

Skicirajte rezultat.

- Primetite da je rezultat malo lošiji u poređenju sa dodavanjem 10 uniformnih. To je zato što je, kao i normalna raspodela, uniformna raspodela simetrična oko svoje srednje vrednosti, dok eksponencijalna raspodela nije. Kažemo da je eksponencijalna raspodela *iskrivljena*. Generalno je iskrivljenost (skewness) slučajne promenljive X sa očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ data sa

$$\mathrm{skew}(X) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right].$$

Ocenite iskrivljenost za $S = U_1 + \cdots + U_{10}$ gde su U_i iid $\mathsf{Unif}([0,1])$ i $R = T_1 + \cdots + T_{10}$ su iid $\mathsf{Exp}(2)$ sa

```
mean(((results-10*1/2)/sqrt(10/12))^3)
mean(((results2-10*1/2)/sqrt(10*(1/2)^2))^3)
```

Prikažite ocene za uniformne i za eksponencijalne.

Drugi deo

- CGT važi i za diskretne slučajne promenljive. Razmotrimo bacanja šestostrane kocke.

```
results3<- sample(1:6, size=1000, replace = TRUE)
hist(results3, breaks= 0:6)
```

- Sada razmotrimo zbir bacanja dve kockice.

```
results4 <- replicate(1000, sum( sample(1:6, size=2, replace= TRUE)
hist(results4, breaks=0:12)
```

- Sada saberimo 20 bacanja kockica.

```
results5 <- replicate(1000, sum( sample(1:6, size=2, replace= TRUE)
hist(results5, breaks=0:120)
```

Skicirajte grafik.

- Ovako će se i nastaviti, sa sve više bacanja kockica koje rezultuju boljim uklapanjem. Neka je X zbir 20 nezavisnih bacanja šestostranih kockica i pogledajmo kako da ocenimo na primer, $\mathbb{P}(X \leq 60)$. Oduzimanje očekivanja i deljenje standardnom devijacijom proizvodi nešto približno normalnoj.

  Očekivanje za X je $(20)(1+6)/2 = 70$, a varijansa $(20)(6-1)(6+1)/12 = 700/12 = 58.333\ldots$.

  Ocenite srednju vrednost i varijansu za `results5` koristeći `mean` i `var` i prikažite rezultate.

- Tako imamo

$$\mathbb{P}(X \leq 60) = \mathbb{P}(\frac{X-70}{\sqrt{700/12}} \leq \frac{60-70}{\sqrt{700/12}}) \approx \mathbb{P}(Z \leq -1.309\ldots).$$

  Ovo se može izračunati sa `pnorm((60-70)/sqrt(700/12))`. Prikažite dobijenu ocenu verovatnoće.

- Možemo oceniti gornju verovatnoću i iz uzoraka bacanja kockica.

  ```
  mean(results5 <= 60)
  ```

  Prikažite ovu Monte Karlo ocenu.

- Poslednja ocena je na neki način bolja od CGT ocene. CGT ocena je fiksna stvar, ne postaje ništa bolja. Povećanje broja uzoraka sa 1000 na veći broj će dati bolju ocenu. Ocenite verovatnoću koristeći 100000 uzoraka i prikažite svoj rezultat.

Deo III

Matematičke osnove za učenje verovatnoće

Glava 42

Logička notacija

Sažetak Simbol $\forall$ znači *za sve* ili *za svaki*. Simbol $\exists$ znači *postoji* ili *postoji bar jedno*. Simbol $\wedge$ predstavlja *logičko i*, tsimbol $\vee$ predstavlja *logičko ili*, i $\neg$ predstavlja *logičku negaciju*.

42.1 *Istinito i lažno*

Neke logičke tvrdnje su tačne, na primer, 3 je veće od 1. Neki su netačne, na primer, 7 je veće od 10. Kada uvedemo promenljive u iskaze njihova istinitost ili laž zavisiće od konkretne vrednosti promenljive. Na primer, $x > 1$ je tačno kada je $x = 2$, ali netačno kada je $x = 1/2$.

42.2 *Za sve i za svako*

Postoji neka vrednost od x takva da je tačno $x > 1$. U logičkoj notaciji postoji je predstavljeno sa $\exists$. Tako je iskaz

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x > 1)$$

tačan jer zaista postoji bar jedna vrednost od x među realnim brojevima za koju je iskaz tačan.

S druge strane, neke izjave su istinite bez obzira na vrednost promenljive. U

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0),$$

simbol $\forall$ znači *za sve*, ili *za svako*, i znači da je iskaz na kraju ($x^2 \geq 0$) tačan za svaki mogući izbor vrednosti x među realnim brojevima. Ovakve izjave se mogu koristiti za formalno definisanje podskupova, preseka i unije.

Definicija 77
Kažemo da je $A \subseteq B$ ako je $(\forall a \in A)(a \in B)$. Kažemo da je $x \in A_1 \cap A_2$ ako je $(\forall i \in \{1, 2\})(x \in A_i)$. Kažemo da je $x \in A_1 \cup A_2$ ako je $(\exists i \in \{1, 2\})(x \in A_i)$. Uopštenije, kažemo da je $x \in \cap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ ako je $(\forall \alpha \in \mathcal{A})(x \in A_\alpha)$ i $x \in \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ ako je $(\exists \alpha \in \mathcal{A})(x \in A_\alpha)$.

To jest, unija skupova su oni elementi takvi da postoji bar jedan skup u kome se element nalazi. Presek skupova se sastoji od elemenata takvih da je, za svaki skup, element u skupu.

Stvari zaista postaju zanimljive kada počnemo da kombinujemo to dvoje. Razmotrite logičku izjavu

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y \geq 10).$$

Ovo se može protumačiti na sledeći način:

Za svaki realan broj x postoji realan broj y takav da je $x + y$ najmanje 10.

Ova izjava je tačna. Međutim, izjava

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + y \geq 10)$$

je netačna. U logičnim izjavama redosled je bitan!

U logici, „postoji” i „za sve” su poznati kao *univerzalni kvantifikatori*. U ovom kursu, pošto se uglavnom bavimo realnim brojevima, koristićemo skraćenicu $(\forall x)$ sa značenjem $(\forall k \in \mathbb{R})$.

42.3 Dokazivanje logičkih iskaza

Kako mogu biti siguran da je $(\forall x)(\exists y)(x + y \geq 10)$ tačno? Mogu da koristim *dokaz* da pokažem rezultat. Da bi se dokazala takva izjava, počinjemo tako što ćemo se baviti kvantifikatorima na početku dokaza.

Na primer, pokušajmo da dokažemo $(\forall x)(x^2 \geq 0)$. Prvi red dokaza dolazi iz činjenice da k koristi univerzalni kvantifikator. Kada vidim $\forall$ iskaz, moram da *instanciram kvantifikator*. To znači da sam u svom prvom redu dokaza pustio promenljivu da uzme proizvoljnu vrednost.

Dakle, moj prvi red dokaza da je $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ je

Neka je $x \in \mathbb{R}$.

Nije baš uzbudljivo! Međutim, time signaliziramo da je vrednost od x je izabrana, i tako sada možemo govoriti o vrednosti x kao fiksnoj vrednosti.

Pošto je x fiksna vrednost znamo, na primer, da jeste veće ili jednako 0, ili je manje ili jednako 0. Pošto je proizvod dva pozitivna ili dva negativna broja u oba slučaja nenegativan, time dobijamo dokaz.

U potpunosti napisan, naš dokaz je sledeći.

Činjenica $(\forall x)(x^2 \geq 0)$

Dokaz Neka je $x \in \mathbb{R}$.
Pretpostavimo da je $x \geq 0$, onda je $x^2 = x \cdot x \geq 0$.
Pretpostavimo da je $x \leq 0$, onda je $x^2 = x \cdot x \geq 0$.
U svakom slučaju, $x^2 \geq 0$, čime je dokaz završen. $\square$

Nekoliko napomena o dokazu.

- U matematičkom pisanju koristimo kompletne rečenice. Često kada razmišljamo o dokazima razmišljamo u delovima rečenica, ali u krajnjem dokazu uvek treba koristiti kompletne rečenice.

- Dokaz smo okončali simbolom $\square$, koji ukazuje da je dokaz završen. Još jedan uobičajen način da se završi dokaz je sa QED, što je skraćenica od latinske fraze *quad erat demonstrandum* što znači „što je trebalo da se pokaže". Latinske fraze su uklonjene iz svakodnevne upotrebe u većini matematičkih oblasti, pa je tako jednostavan simbol $\square$ ono što se danas najviše koristi.

- Koristili smo „pretpostavimo” da razbijemo moguće vrednosti x na različite slučajeve. Još jedan uobičajen način da se ovo kaže je upotreba reči „slučaj”. Dakle, mogli smo i da napišemo „Slučaj 1: $x \geq 0$” i „Slučaj 2: $x \leq 0$”.

Prilikom instanciranja $(\forall x)$, moramo dozvoliti bilo koju vrednost x. Kada instanciramo $(\exists x)$, možemo da izaberemo vrednost promenljive x. Ovo može učiniti ove vrste dokaza veoma jednostavnim.

Činjenica $(\exists x)(x + 5 \geq 10)$

Dokaz Neka je $x = 5$.
Onda $x + 5 = 5 + 5 = 10 \geq 10$. $\square$

Hajde sada da se vratimo ovome $(\forall x)(\exists y)(x + y \geq 10)$. U prvom redu ćemo instancirati x

Neka je $x \in \mathbb{R}$.

U sledećem redu treba da instanciramo y. Pošto smo već instancirali x, možemo koristiti x da definišemo y. Sada hoću da završim sa$x + y \geq 10$. To znači da želim $y \geq 10 - x$. Ne mogu samo da kažem $y \geq 10 - x$ jer to nije broj, treba da napišem da je y jednako nečemu. Na primer, $y = 10 - x$. Dakle, moj dokaz je sledeći.

Činjenica $(\forall x)(\exists y)(x + y \geq 10)$

Dokaz Let $x = 5$.
Neka je $y = 10 - x$
Onda $x + y = x + 10 - x = 10 \geq 10$. $\square$

Važno je napomenuti da izbor y-a ovde nije bio jedinstven. Na primer,

Dokaz Neka je $x = 5$.
Neka je $y = 14 - x$
Onda $x + y = x + 14 - x = 14 \geq 10$. $\square$

je savršeno validan dokaz. Postoji beskonačan broj mogućih dokaza za ovu izjavu, i ne treba da brinete o dobijanju „najboljeg” dokaza pokušavajući da učinite y što manjim. Šta god funkcioniše kao dokaz je sjajno!

42.4 Logičko i i logičko ili

Logičko i, koje se piše $\wedge$, i logičko ili, koje se piše $\vee$, povezuju istinite i neistinite izjave. Logičko i je istinito samo ako su sve izjave koje povezuje istinite. Na primer,

$$(3 > 5) \wedge (7 > 5)$$

je netačno jer je $(3 > 5)$ netačno i dovoljna je bar jedna neistinita izjava da logičko i proizvede neistinitost. Dok je

$$(3 > 5) \vee (7 > 5)$$

tačno jer je $(7 > 5)$ tačno i dovoljna je bar jedna tačna izjava da logičko ili proizvede tačnost/istinitost.

Zapis podseća na presek i uniju skupova, a ovo nije slučajnost. Zapisivanje postavljenih simbola u terminima logičkog ili i logičkog i može se učiniti na sledeći način.

$$(x \in \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha) = \vee_{\alpha \in \mathcal{A}} (x \in A_\alpha),\ (x \in \cap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha) = \wedge_{\alpha \in \mathcal{A}} (x \in A_\alpha).$$

42.5 *Negacija i dokazivanje neistinosti*

Operator negacije $\neg$ menja istinitost u neistinitost i obrnuto. Na primer, $(3 > 5)$ je neistinito, ali je $\neg(3 > 5)$ istinito. Slično tome, $(\forall x \geq 3)(2x \geq 5)$ je istinito, ali je $\neg(\forall x \geq 3)(2x \geq 5)$ neistinito.

Pretpostavimo da želim da dokažem da je izjava p lažna. Onda možemo koristiti ista pravila kao ranije, samo želimo da dokažemo da je $\neg p$ istinita. Da bismo ovo iskoristili, potrebna su nam pravila kako da negiramo logičke izjave.

Ovo će zavisiti od vrste izjave. Na primer,

$$\neg(x = 5) = (x \neq 5),$$

dok je

$$\neg(x \geq 5) = (x < 5).$$

Razmislite o negiranju izjave „za sve". Ovo govori da nisu sve vrednosti promenljive u redu. Drugim rečima, postoji vrednost promenljive koja nije u redu. Dakle, naše pravilo je da negacija pretvara $\forall$ u $\exists$, tj.

$$\neg(\forall p)(q) = (\exists p)(\neg q).$$

Izbor p koji čini q neistinitim se ponekad naziva *kontraprimer*.

Slično tome, kada negiramo izjavu „postoji", time kažemo da bez obzira koju vrednost da izaberamo, neistinito je. Dakle, negacija pretvara $\exists$ u $\forall$, tj.

$$\neg(\exists p)(q) = (\forall p) \neq (q).$$

Razmotrite naš raniji primer $(\exists y)(\forall x)(x + y \geq 10)$. Tvrdio sam da je to bilo lažno, ali sada imamo alate da to i dokažemo. Umesto da dokazujete da je iskaz lažan, pokušajte da dokažete da je njegova negacija istinita.

$$\begin{aligned}\neg(\exists y)(\forall x)(x + y \geq 10) &= (\forall y)\neg(\forall x)(x + y \geq 10)\\ &= (\forall y)(\exists x)\neg(x + y \geq 10) = (\forall y)(\exists x)(x + y < 10).\end{aligned}$$

Činjenica $(\forall y)(\exists x)(x + y < 10)$

Dokaz Neka je $y \in \mathbb{R}$.
Neka je $x = 9 - y$
Onda $x + y = 9 - y + y = 9 < 10$.

42.6 Ako-onda (If-then) iskazi

Uobičajena formulacija u logici je „Ako je nešto istina, onda nešto drugo je tačno." Ovo se može napisati pomoću if-then operatora $\to$, tako

$$p \to q$$

znači ako je izjava p tačna, onda je q tačna. Ovo se takođe čita kao p povlači(implicira) q. Ispostavlja se da možemo napisati ovaj operator koristeći naše prethodne operatore kao

$$(p \to q) = (p \wedge q) \vee \neg p$$

Drugim rečima, ili p nije tačno, ili ako je tačno, onda i q tačno. To znači da prilikom dokazivanja ove vrste iskaza, ne moramo da brinemo šta se dešava kada p nije istina. Naš prvi red ako-onda dokaza je uvek „Neka je p istinito."

Na primer,

Činjenica ako je $a > 2$, onda je $a^2 > 3$.

Dokaz Neka je $a > 2$.
Onda $a \cdot a > 2 \cdot 2$ tako da je $a^2 > 4 > 3$. □

Zadaci

42.1 Dokazati $(\exists x)(2x + 3 \geq 10)$.

42.2 Dokazati $(\forall y)(y^2 + 1 > 0)$.

42.3 Dokazati $(\forall x)(\exists y)(xy \leq 0)$

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Neka je $y = -|x|$. Pretpostavimo da je $x \geq 0$, onda $y \leq 0$ tako da je $xy \leq 0$. Ako je $x \leq 0$, onda je $y \geq 0$, i tako $xy \leq 0$. U svakom slučaju $xy \leq 0$. □

42.4 Zapisati $\neg(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y)(2x + y \geq 4)$ bez negacije.

42.5 Dokazati da ako je $x > 3$ onda $2x > 6$.

42.6 Dokazati da $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [-\delta, \delta])(x^2 \leq \epsilon)$.

Glava 43

Skupovi i Mere

Pitanje dana Šta je skup?

Sažetak **Skupovi** su neuređene kolekcije **elemenata**. Mere kao što su **mera prebrojavanja** i **Lebegova mera** nam govore o veličini skupa. Možemo udružiti dva skupa A i B da formiramo **Dekartov (Kartezijanski) proizvod** $A \times B$, gde je $(a, b) \in A \times B$ ako i samo ako je $a \in A$ i $b \in B$. Ovo se može proširiti na kartezijanski proizvod proizvoljnog broja skupova.

Prva matematika koju većina ljudi uči je koncept broja. Ali šta je zapravo broj? Predstavlja veličinu skupa. Za na primer, ako imam skup objekata

$$\{\text{spajalica, olovka, heftalica}\},$$

onda imam tri objekta. Ako imam sledeće voće:

$$\{\text{jabuka, narandža, banana}\},$$

onda imam tri objekta. To što je prvi set bio kancelarijski materijal, a drugi voće nije bitno.

Savremeni matematičari su razvili ovu ideju o skupu objekata, i koristili je kao osnovu za razvoj čitavih grana matematike. Mi ćemo definisati ideju skupa na sledeći način.

43.1 Skupovi

Skup je kolekcija elemenata gde redosled nije bitan. Stavite vitičaste zagrade oko elemenata da ukažete da je to skup. Na primer,

$$\{a, b, c\}$$

je skup koji sadrži elemente a, b i c. To je isto kao i skup $\{b, c, a\}$.

Definicija 78
Skup je neuređena kolekcija elemenata.

Kažemo da je red elemenat skupa $\{\text{red, green, blue}\}$. Koristimo sledeću notaciju da opišemo ovo.

Notacija 5
Ako je a elemenat skupa A, pišemo $a \in A$. Ako b nije element skupa A, pišemo $b \notin A$.

Obratite pažnju da kraj simbola $\in$ sa tri linije koje izlaze pokazuje ka skupu. Na primer

$$a \in \{a, b, c\}, \quad d \notin \{a, b, c\}.$$

Ako je svaki element skupa A unutar skupa B, kažemo da je A *podskup* od B i pišemo

$$A \subseteq B.$$

Definicija 79
Skup A je **podskup** skupa B (piše se $A \subseteq B$) ako za svaki element $a \in A$ važi i $a \in B$.

Primetite da notacija podskupa liči na oznaku $\leq$: uvek se postavlja otvoreni kraj simbola $\subseteq$ prema većem skupu. Na primer,

$$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}, \quad \{a\} \subseteq \{a, b, c\}, \quad \{b, d\} \not\subseteq \{a, b, c, \}.$$

Pomaže da imate skup bez elemenata, koji zovemo *prazni skup*.

Definicija 80
Skup $\{\} = \emptyset$ je **prazan skup** koji ne sadrži nijedan element.

Postoje dve korisne operacije za rad sa skupovima. Prvo, za kolekciju skupova, želimo da razmotrimo elemente koji se nalaze u svakom pojedinačnom skupu. Ovo je *presek* skupova.

Definicija 81
Za dva skupa A i B, kažemo da je $A \cap B$ (piše se i AB i A, B) **presek** skupova ako se AB sastoji tačno od onih elemenata a koji pripadaju $a \in A$ i $a \in B$.
Za kolekciju skupova $\{A_\alpha\}$, kažemo da se

$$\cap_\alpha A_\alpha$$

sastoji tačno od onih elemenata a koji pripadaju A_α za svako α.

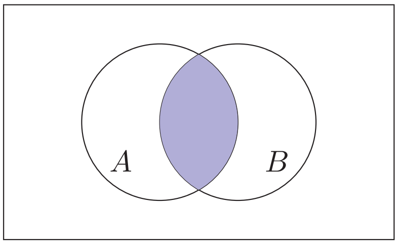
Drugo, želimo da razmotrimo koji se objekti nalaze u najmanje jednoj od kolekcije skupova. Ovo je *unija* skupova.

Definicija 82
Za dva skupa A i B, kažemo da je $A \cup B$ **unija** skupova ako se $A \cup B$ sastoji tačno od elemenata a takvih da važi ili $a \in A$ ili $a \in B$.
Za kolekciju skupova $\{A_\alpha\}$, kažemo da se

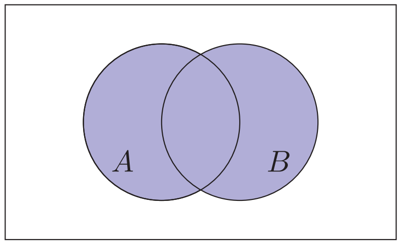
$$\cup_\alpha A_\alpha$$

sastoji se od tačno onih elemenata a takvih da postoji u najmanje jedno α takvo da je $a \in A_\alpha$.

Ojlerovi dijagrami se mogu koristiti za označavanje svojstava skupova. Na primer



Osenčena oblast je $A \cap B$.

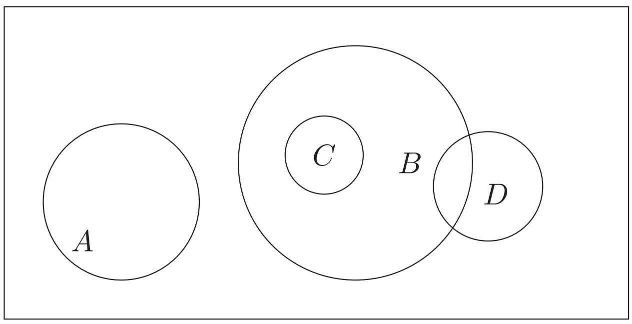


Osenčena oblast je $A \cup B$.

Da sumiramo notaciju:

$\emptyset$	tprazan skup
$\in$	je element skupa
$\notin$	nije element skupa
$\subseteq$	je podksup skupa
$\not\subseteq$	nije podskup skupa
$\cap$	presek
$\cup$	unija

Još jedan Ojlerov dijagram.



Ova slika nam kaže da su svi $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$ i $C \cap D$ prazni skupovi. Takođe, ukazuje da je $C \subseteq B$.

43.2 *Neki važni skupovi*

Važni skupovi se obično označavaju podebljanim duplim slovima. Dva najvažnija skupa brojeva koja se koriste u ovom kursu su sledeća.

$\mathbb{R}$	realni brojevi
$\mathbb{Z}$	celi brojevi

43.3 *Mere*

Mera je još jedan način merenja veličine skupa. Postoje dve važne mere koje će se stalno koristiti tokom ovog kursa.

1. Mera prebrojavanja (counting measure). Ona prebrojava objekate u skupu. Na primer, mera prebrojavanja za $\{a, b, c\}$ je 3 jer skup sadrži tri elementa. Napisaćemo $\#$ za meru

prebrojavanja, tako da je $\#(\{a, b, c\}) = 3$. Mera prebrojavanja praznog skupa je 0, tako da je $\#(\emptyset) = 0$.

Možemo to napisati i kao zbir

$$\#(A) = \sum_{i \in A} 1,$$

ili koristeći indikatorsku funkciju

$$\#(A) = \sum_{i} \mathbb{1}(i \in A).$$

2. Lebegova mera. Ovo je mera koja je ista kao i dužina u jednoj dimenziji, površina u dve dimenzije, zapremina u tri dimenzije i tako dalje. Na primer, Lebegova mera intervala $[3.5, 7.2]$ je $7.2 - 3.5 = 3.7$. Koristićemo ℓ za Lebegovu meru, tako da je $\ell([3.5, 7.2]) = 3.7$.

   Baš kao što možete pronaći meru prebrojavanja sabiranjem jedinica, tako možete pronaći Lebegovu meru za sve skupove koji se razmatraju u ovom kursu integracijom konstantne funkcije koja je uvek jednaka 1

   $$\ell(A) = \int_A 1(s)\, dA,$$

   ili možemo to zapisati koristeći indikatorske funkcije.

   $$\ell(A) = \int_s \mathbb{1}(s \in A)\, dA.$$

Na primer

$$\ell([3.5, 7.2]) = \int_{s \in [3.5, 7.2]} 1\, ds = s|_{3.5}^{7.2} = 7.2 - 3.5 = 3.7.$$

Neka je A trougao sa temenima $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 0)$ u $\mathbb{R}^2$. Onda je

$$\begin{aligned}
\ell(A) &= \int_{s \in A} 1\, d\mathbb{R}^2 \\
&= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} 1\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{1} 1 - x\, dx \\
&= -(1 - x)^2/2_0^1 = 1/2.
\end{aligned}$$

Pogledajte posebno poglavlje o integralima za više detalja o dvostrukim integralima.

Korisna činjenica o meri m je da ako se dva skupa ne seku, onda je mera unije jednaka zbiru mera dva skupa. Dakle, u našem drugom Ojlerovom dijagramu

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

43.4 Dekartov proizvod skupova

Ako imam dva skupa A i B, onda se *Dekartov (Kartezijanski) proizvod*, zapisan kao $A \times B$ sastoji od uređenih parova (zvanih i dvojke) (a, b) gde je $a \in A$ i $b \in B$.

Na primer

$$\{a, b\} \times \{c, d, e\} = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}.$$

I mera prebrojavanja i Lebegova mera su primeri *proizvod mera*.

Definicija 83
Mera μ je **proizvod mera** ako za sve merljive A i B,

$$\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Činjenica 109
I mera prebrojavanja i Lebegova mera su proizvod mere.

Na primer, neka je $A = \{a, b\}$ i $B = \{c, d, e\}$. Onda je

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}.$$

Takođe

$$\#(A) \cdot \#(B) = (2)(3) = 6 = \#(A \times B).$$

Za primer sa Lebegovim merama uzmimo $A = [2, 3]$ i $B = [6, 7.5]$. Onda je

$$A \times B = \{(x, y) : x \in [2, 3], y \in [6, 7.5]\},$$

i ovde je $\ell(A) = 3 - 2 = 1$, $\ell(B) = 7.5 - 6$ i $\ell(A \times B) = (1)(1.5) = 1.5$.

Drugim rečima, površina pravougaonika jednaka je proizvodu dužina stranica!

Zadaci

43.1 Kolika je mera prebrojavanja skupa $\{1, 2, \ldots, 10\}$?

43.2 Kolika je mera prebrojavanja skupa $\{1, 2, \ldots, 10\} \cap \{6, 7, \ldots, 15\}$?

43.3 a) Šta je $\{r, g, b\} \cap \{g, b, y\}$?
b) Šta je $\{r, g, b\} \cup \{g, b, y\}$?

43.4 Odredi $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$?

43.5 Kolika je mera prebrojavanja od $\{r, g, b\}$?

43.6 Kolika je mera prebrojavanja od $\{x_1, x_2, x_3\}$?

43.7 Kolika je mera prebrojavanja od $\{1, 3, 5\} \times \{7, 9\}$?

43.8 Kolika je mera prebrojavanja od $\{r, g, b\} \times \{y, m, r\}$?

43.9 Neka je $A = \{r, g, b\}$. Kolika je mera prebrojavanja od $A \times A \times A \times A$?

43.10 Kolika je mera prebrojavanja od $\{0, 1\}^{10}$?

43.11 a) Kolika je Lebegova mera od $[2, 10]$?

b) Kolika je Lebegova mera od $[-6, 2]$?

43.12 Kolika je Lebegova mera od $[-1, 1] \cap [0, 4]$?

43.13 Kolika je Lebegova mera od $[3, 4.5] \times [0, 6]$?

43.14 Kolika je Lebegova mera od $[0, 2]^4$?

43.15 *De Morganovi zakoni* kažu da je

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

Pretpostavimo da ovaj zakon važi za dva skupa i onda dokažimo da

$$(A \cup B \cup C)^C = A^C \cap B^C \cap C^C.$$

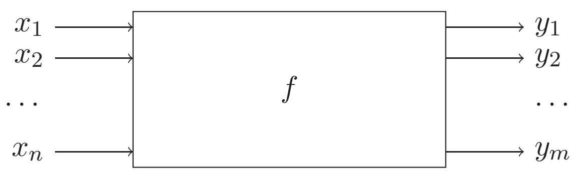
Glava 44

Funkcije

Sažetak **Funkcija** $f : A \to B$ uzima za ulaz elemente iz A i vraća kao izlaz jedan element iz B. Funkcija je **jedan-jedan** (piše se i $1-1$) ako je $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$. Funkcija je **na** ako za svako $b \in B$, postoji $a \in A$ takvo da je $f(a) = b$.

Funkcije su srce i duša moderne matematike. Veliki deo privlačnosti matematike kao alata je njena sposobnost da transformiše probleme iz komplikovane formulacije do jednostavnijeg rezultata. I ove transformacije često se mogu napisati kao funkcije.

U ovom kursu ćemo se baviti samo **izračunljivim funkcijama** To su u suštini mašine koje uzimaju jednu ili više promenljivih kao **ulaz (input)**. Ovi ulazni parametri se takođe nazivaju **argumenti** funkcije. Funkcija zatim izvodi neka izračunavanja i vraća jednu ili više **izlaznih (output)** promenljivih.



Na primer, izračunljiva funkcija $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = y_1$ ima dve ulazne promenljive x_1 i x_2, izračunava zbir ulaza, i vraća jednu izlaznu promenljivu y_1. Ono što se može izračunati je dato Tjuringovom mašinom, koju za svrhe ovog kursa možete zamisliti kao računar opšte namene.

Definicija 84
Skup mogućih ulaza za funkciju f se naziva **domen**. Skup mogućih izlaza funkcije se naziva **kodomen**.

Drugim rečima, funkcija uzima inpute iz svog domena i transformiše ih u elemente kodomena. Imajte na umu da kodomen nije jedinstven. Na primer, mogao bih da kažem da $f(x) = x^2$ ima i domen i kodomen jednak skupu realnih brojeva, ili bih mogao reći da se kodomen sastoji samo od nenegativnih brojeva.

Notacija 6
Pišemo $f : A \to B$ ako je A skup ulaznih vrendosti za f a sve izlazne vrednosti pripadaju B.

Za dato $b \in B$, može postojati $0, 1$ili beskonačan broj vrednosti $a \in A$ takve da je $f(a) = b$. Kada ih ima najmanje 1, kažemo da je funkcija *na*.

Definicija 85
Funkcija $f : A \to B$ je **na** ako je

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b).$$

Matematičari koriste termin *slika* da opišu rezultat koji dolazi od primene funkcije na jedan ili više ulaza.

Definicija 86
Slika od $a \in A$ pod dejstvom funkcije f je $f(a)$. **Slika** od $A' \subseteq A$ pod dejstvom funkcije f je $\{b : (\exists a \in A')(f(a) = b)\}$.

Rečju, slika skupa su svi mogući izlazi funkcije kada ulaz dolazi iz tog skupa. Svojstvo *na* možemo okarakterisati u smislu slika.

Činjenica 110
Funkcija $f : A \to B$ je **na** ili **surjektivna** ako je slika od A jednaka B.

Na funkcije imaju najmanje jedan ulaz za svaki izlaz. Ako funkcija ima najviše jedan ulaz za svaki izlaz, funkcija je jedan-jedan.

Definicija 87
Funkcija $f : A \to B$ je **jedan-jedan** (piše se i $1 - 1$) ili **injektivna** ako je

$$(\forall a, a' \in A)(f(a) = f(a') \to a = a').$$

Rečima: ako dva ulaza imaju isti izlaz, ta dva ulaza mora da su bili jednaki! Sada, ako je funkcija i $1 - 1$ i *na* to se onda zove (veliko iznenađenje) *jedan-jedan i na*.

Definicija 88
Funkcija f je $1 - 1$ **i na** ili **bijekcija** ako je i $1 - 1$ i *na*.

Zadaci

44.1 Za datu funkciju $f : \{a, b, c\} \to \{b, c, d\}$ odgovoriti na sledeće.

a) Koji su mogući ulazi za f?

b) Koji su mogući izlazi za f?

44.2 Za datu funkciju $t : \{[0, 3] \to [0, 10]\}$ odgovoriti na sledeće.

a) Koji su mogući ulazi za t?

b) Koji su mogući izlazi za t?

44.3 Neka je $g(a) = b$, $g(b) = b$ i $g(c) = d$. Da li je g $1 - 1$?

44.4 Neka je $h(2) = h(3) = 4,\ h(4) = 5$. Da li je h $1-1$?

44.5 Razmotrimo funkciju $f(x) = x^2$.

a) Recimo $f : [0,1] \to [0,1]$. Da li je f *na*? Da li je $1-1$?

b) Recimo $f : [-1,1] \to [0,1]$. Da li je f *na*? Da li je $1-1$?

c) Recimo $f : [-1,1] \to [0,2]$. Da li je f *na*? Da li je $1-1$?

44.6 Neka je $r(a) = b,\ r(b) = c,\ r(c) = c$.

a) Ako je $r : \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ da li je r *na*?

b) Ako je $r : \{a,b,c\} \to \{b,c\}$ da li je r *na*?

Glava 45

Integracija

Sažetak Integrali u odnosu na Lebegovu meru su klasični tip integrala sa kojim se susrećete u Analizi. Integrali po meri prebrojavanja su isto što i sume.
U dvostrukim (i trostrukim i višim) integralima i sumama, možete promeniti redosled integracije (ili sumiranja) koristeći **Fubinijevu teoremu** kada je ukupni integral ili suma konačan, ili korišćenjem **Tonelijeve teorema** kada su integrand ili sabirci nenegativni.

U Analizi ste učili o integralima kao što su

$$A_1 = \int_{x=0}^{1} x^2 \, dx,$$

ili o sumama kao što je

$$A_2 = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2.$$

I jedno i drugo uključuje sabiranje objekata, i za matematičara *oboje* su primeri integrala. Prvi integral je u odnosu na Lebegovu meru, a druga je u odnosu na meru prebrojavanja. Za μ jednako Lebegovoj meri možemo pisati

$$A_1 = \int_{x \in [0,1]} x^2 \, d\mu = \int_{x \in [0,1]} x^2 \, dx.$$

Ovo je *neprekidni* integral.

Suma je isto integral, ali u odnosu na meru prebrojavanja.

$$A_2 = \int_{i \in \{1,2,\ldots\}} 1/i^2 \, d\# = \sum_{i \in \{1,2,\ldots\}} 1/i^2.$$

Takav integral je *diskretni* integral.

Zašto je korisno posmatrati i integrale i sume kao integrale (samo u odnosu na različite mere)? Pa, to nam omogućava da pišemo teoreme o integralima i sumama koristeći samo jednu notaciju, a ne dve, jednom za kontinuirane integrale i jednom za diskretne integrale. Kasnije u ovom poglavlju videćemo Tonelijevu i Fubinijevu teoremu. One daju lep primer ovoga na delu, jer se primenjuju na opšte integrale bez obzira da li je mera Lebegova ili mera prebrojavanja.

45.1 Integracija nad merom

Integral se sastoji od tri dela:

1. Granice (Limesi) integracije.
2. Integrand (podintegralna funkcija).
3. Diferencijal koji nam govori koja se mera koristi za ovaj integral.

Ova tri dela se mogu zapamtiti preko akronima LID: Limesi, Integrand, Diferencijal.

Kada je μ mera prebrojavanja, integral je jednostavno suma:

$$\int_{x \in A} f(x)\, d\mu = \sum_{x \in A} f(x).$$

Primer 71
Neka je $f(i) = i$ za $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Naći

$$\int_{i \in \{1,2,3,4\}} f(i)\, d\mu,$$

gde je μ mera prebrojavanja.

Rešenje Pošto je μ mera prebrojavanja, ovo postaje

$$\int_{i \in \{1,2,3,4\}} f(i)\, d\mu = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = \boxed{10}.$$

Primer 72
Za $f(i, j) = i + j$, šta je $\int_{(i,j) \in A} f(i, j)\, d\#$ za $A = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$?

Rešenje A ima šest elemenata, pa je integral zbir vrednosti funkcije od ovih elemenata:

$$\int_{(i,j) \in A} f(i, j) = f(1, 1) + f(1, 2) + f(2, 1) + f(2, 2) + f(3, 1) + f(3, 2).$$

Kada je μ Lebegova mera, prvo pokušajte da izračunate Rimanov integral o kome ste učili na kursu Analize. Ovo se obično izračunava (kada je to moguće) pronalaženjem primitivne funkcije i korišćenjem Osnovne teoreme integralnog računa (Njutn-Lajbnicove formule). Ako Rimanov integral postoji i konačan je, Lebegov integral je jednak istoj vrednosti.

Primer 73
Uzmimo $f(x) = x$. Naći

$$\int_{x\in[1,4]} f(x)\, dx.$$

Rešenje Kako je $[x^2/2]' = x$ što je neprekidna funkcija nad $[1,4]$, Osnovna teorema integralnog računa nam kaže da je

$$\int_{x\in[1,4]} f(x)\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 = 8 - 1/2 = \boxed{7.500}.$$

45.2 *Višestruki integrali*

Kada se suočimo sa integralom nad 2 ili više dimenzija, bilo bi lepo da možete da ga pretvorite u niz jednodimenzionih integrala. Na primer, želeli bismo da možemo da predstavimo

$$\int_{(x,y)\in[0,1]\times[0,2]} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{x\in[0,1]} \int_{y\in[0,2]} f(x,y)\, d\mu(y)\, d\mu(x).$$

Nažalost, ova jednakost ne važi uvek. Međutim, postoji nekoliko jednostavnih uslova pod kojima ova jednakost važi.

1. Toneli kaže da jednakost važi kada je integrand nenegativan.

2. Fubini kaže da jednakost važi kada je

$$\int_{(x,y)\in A} |f(x,y)|\, d\mu < \infty.$$

Primetite da ako je integrand $f(x,y)$ i pozitivan i negativan za tačke $(x,y) \in A$, onda je jedan mogući pristup da se prvo izračuna

$$\int_{(x,y)\in A} |f(x,y)|\, d\mu$$

koristeći Tonelija, i onda ako je konačan možete koristiti Fubinija na početnom problemu.

Formalno, ove teoreme možemo iskazati na sledeći način.

Teorema 8 (Fubini i Toneli)
Pretpostavimo da je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i da želimo da izračunamo

$$I = \int_{(x,y)\in A} f(x,y)\, d\mu.$$

gde je $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ mera proizvod. Pretpostavimo da važi jedan od sledećih uslova:

1. Tonelli: $f(x,y) \geq 0$ za sve $(x,y) \in A$.
2. Fubini: $\int_{(x,y)\in A} |f(x,y)|\, d\mu < \infty$.

Onda je

$$\begin{aligned} I &= \int_{\{x|(\exists y)((x,y)\in A)\}} \left[\int_{\{y|(x,y)\in A\}} f(x,y)\, d\mu_2 \right] d\mu_1 \\ &= \int_{\{y|(\exists x)((x,y)\in A)\}} \left[\int_{\{x|(x,y)\in A\}} f(x,y)\, d\mu_1 \right] d\mu_2. \end{aligned}$$

Počnimo sa primerom u kom se koristi Lebegova mera.

Primer 74
Naći

$$\int_{(x,y)\in[0,1]\times[0,2]} x^2 y\, d\mu,$$

gde je μ Lebegova mera.

Rešenje Pošto je integrand nenegativan za svako $(x,y) \in [0,1] \times [0,2]$, važi Toneli, i

$$\begin{aligned} \int_{(x,y)\in[0,1]\times[0,2]} x^2 y\, d\mathbb{R}^2 &= \int_{x\in[0,1]} \int_{y\in[0,2]} x^2 y\, dy\, dx \\ &= \int_{x\in[0,1]} x^2 y^2/2|_0^2\, dx \\ &= \int_{x\in[0,1]} 2x^2\, dx \\ &= (2/3)x^3|_0^1 = 2/3 \approx \boxed{0.6666}. \end{aligned}$$

Evo sada i primera koji koristi meru prebrojavanja.

Primer 75
Naći

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}(1/2)^i.$$

Rešenje Ovo je

$$\int_{(i,j):i\in\{1,2,\ldots\},j\in\{1,\ldots,i\}}(1/2)^i\,d\mu,$$

gde je μ mera prebrojavanja. Pošto je integrand nenegativan, možemo primeniti Tonelija. Imajte na umu da je događaj

$$\{(i,j):j\in\{1,\ldots,i\},i\in\{1,2,\ldots\}\}$$

isto što i događaj

$$\{(i,j):j\in\{1,2,3\ldots\},i\in\{j,j+1,j+2,\ldots\}\}$$

Tako, po Toneliju, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}(1/2)^i &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}(1/2)^i\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(1/2)^j/(1-1/2)\\ &= 1/(1-1/2)=\boxed{2}.\end{aligned}$$

Primetite da je

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}(1/2)^i=\sum_{i=1}^{\infty}i(1/2)^i,$$

tako da gornji primer takođe pokazuje da Toneli može biti koristan i u izračunavanju sume preko jedne promenljive.

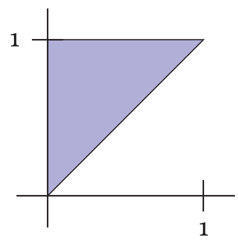
Primer 76
Naći
$$I = \int_{(x,y):x\in[0,1],y\in[x,1]} 1 - xy\ dy\ dx.$$

Rešenje Kako je integrand nenegativan za svako (x, y) takvo da je $x \in [0, 1]$ i $y \in [x, 1]$, po Toneliju je ovo jednako

$$\begin{aligned} I &= \int_{x\in[0,1]} \int_{y\in[x,1]} 1 - xy\ dy\ dx \\ &= \int_{x\in[0,1]} y - xy^2/2|_x^1\ dx \\ &= \int_{x\in[0,1]} 1 - x/2 - (x - x^3/2)\ dx \\ &= \int_{x\in[0,1]} 1 - (3/2)x + x^3/2\ dx \\ &= x - (3/4)x^2 + x^4/8|_0^1 \\ &= 1 - 3/4 + 1/8 = 3/8 = \boxed{0.3750}. \end{aligned}$$

U gornjem primeru, granicama za promenljivu y je dopušteno da zavise od x jer je x već bilo postavljeno spoljašnjim integralom.

Šta da smo hteli da integral po y bude spolja? Skup A izgleda ovako



Najmanje y u ovom regionu može biti 0, a najveće 1. Jednom kada izaberemo y, onda x može da se kreće od 0, najniže, do vrednosti y, najviše. Stoga

$$\begin{aligned} I &= \int_{y\in[0,1]} \int_{x\in[0,y]} 1 - xy\ dx\ dy \\ &= \int_{y\in[0,1]} x - x^2y/2|_0^y\ dy \\ &= \int_{y\in[0,1]} y - y^3/2\ dy \\ &= y^2/2 - y^3/8|_0^1\ dy \\ &= 1/2 - 1/8 = \boxed{0.3750}. \end{aligned}$$

i na kraju dobijamo isti odgovor. (Hvala Bogu!)

Tonelijevi i Fubinijevi uslovi su bili napisani za dvodimenzione integrale, ali zapravo važe za bilo koji integral konačne dimenzije.

45.3 *Parcijalna integracija*

Parcijalna integracija (Integration by parts - IBP) nam omogućava da prebacimo izvod jednog činioca unutar integrala preko drugog činioca. Njegova forma je ista kao pravilo proizvoda za integraciju.

$$fg' = [fg]' - f'g.$$

Možete videti da nam ova formula omogućava da prebacimo izvod od g ka f, po cenu dodavanja negativnog predznaka i drugog člana $[fg]'$. Postoje tri koraka za korišćenje IBP-a

1. Napišite integrand kao $f \cdot g'$.
2. Iskoristite pravilo proizvoda da prebacite izvod sa g na f.
3. Rešite jednostavniji integral.

Obično želite da prebacite izvod na član koji postaje jednostavniji kada se diferencira. Na primer, $[x]' = 1$, tako da je često $f(x) = x$. Isto tako $[\ln(x)]' = 1/x$, tako da, takođe, pokušavamo da prebacimo izvode na prirodne logaritme.

Primer 77
Naći

$$\int_0^1 x \exp(-x)\, dx$$

koristeći IBP.

Rešenje Ovde je $f(x) = x$ i $g'(x) = \exp(-x)$. Stoga je $g(x) = -\exp(-x)$. Ubacivanje u formulu za IBP daje

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \exp(-x)\, dx &= \int_0^1 x[-\exp(-x)]'\, dx \\
&= \int_0^1 [x(-\exp(-x)]' - [x]'(-\exp(-x))\, dx \\
&= -x\exp(-x)|_0^1 + \int_0^1 \exp(-x)\, dx \\
&= -\exp(-1) - (0) + (-\exp(-x))|_0^1 \\
&= 1 - 2\exp(-1) \approx \boxed{0.2642}.
\end{aligned}$$

Zadaci

45.1 Izračunajte sledeće integrale:

$$\int_0^3 x^3\, dx, \int_{-\infty}^0 x\exp(x)\, dx, \int_{-\infty}^{\infty} x\exp(-x^2/2)\, dx.$$

(Napomena, nakon što ste rešili probleme poput ovih, ohrabrujem vas da koristite alate kao što je Wolfram Alpha da *proverite* svoje odgovore. Na primer, unesite

```
integrate x^3 from 0 to 3
```

na sajtu www.wolframalpha.com da proverite svoje rešenje prvog integrala.)

45.2 Naći $\int_0^\infty x^2 \exp(-x)\, dx$.

45.3 Naći

$$\int_1^2 x \ln(x)\, dx$$

pomerajući izvod od $x = [x^2/2]'$ uz $\ln(x)$ da bismo ga se otarasili.

45.4 Naći $\int_0^1 -\ln(s)\, ds$.

45.5 Pretpostavimo da je

$$I = \int_0^\infty \int_0^x |f(x,y)|\, dy\, dx < \infty$$

tako da se može primeniti Fubini. Zamenite znakove pitanja sa odgovarajućom funkcijom od y.

$$I = \int_0^\infty \int_?^? f(x,y)\, dx\, dy.$$

45.6 Pretpostavimo

$$\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^i |w(i)| < \infty.$$

Zamenite znak pitanja sa odgovarajućom funkcijom od j.

$$\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^i w(i) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=?}^? w(i) < \infty.$$

Deo IV

Rešenja zadataka

Glava 46

Rešeni zadaci

1.1 Za $A \in \mathcal{F}$ naći $\mathbb{P}(A \cup A^C)$.

Rešenje Pošto je $A \cup A^C = \Omega$, to je $\mathbb{P}(\Omega) = \boxed{1}$.

1.3 Dokazati da ako je prostor ishoda Ω merljiv, onda je merljiv i $\emptyset$.

Rešenje Prazan skup $\emptyset$ je komplement od Ω, tako da $\Omega \in \mathcal{F}$, povlači $\Omega^C = \emptyset \in \mathcal{F}$.

1.5 Ako je $[0, 1 - 1/n]$ merljiv za svako $n \geq 2$, pokazati da je interval $[0, 1)$ merljiv.

Rešenje Pošto su merljii skupovi zatvoreni za prebrojive unije, dovoljno je pokazati

$$[0, 1) = \cup_{n=1}^{\infty}[0, 1 - 1/n].$$

Neka je $x \in \cup_{n=1}^{\infty}[0, 1 - 1/n]$. Onda postoji n takvo da $x \in [0, 1 - 1/n]$ i $0 \leq x \leq 1 - 1/n < 1$. Dakle $x \in [0, 1)$.

Neka je $x \in [0, 1)$. Onda $0 \leq x < 1$. Neka je $n = \lceil 1/(1-x) \rceil$. Onda pošto je $f(x) = \lceil x \rceil$ rastuća funkcija,

$$1 - \frac{1}{1/(1-x)} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

Ali

$$1 - \frac{1}{1/(1-x)} - 1 - (1-x) = x,$$

tako da $x \leq 1 - 1/n$ i $x \in [0, 1 - 1/n]$, dakle $x \in \cup_{i=1}^{\infty}[0, 1 - 1/i]$.

1.7 *Particija* skupa Ω je kolekcija disjunktnih skupova čija unija je Ω. Neka A, B i C particiraju Ω. Izračunati $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$?

Rešenje Pošto A, B i C prave particiju, oni su disjunktni i važi

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(\Omega) = \boxed{1}.$$

1.9 Pretpostavimo za $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$\mathbb{P}([i, i+1)) = (1/3)^{i+1}.$$

Naći $\mathbb{P}([0, \infty)$?

Rešenje Pošto su $A_i = [i, i+1)$ dijunktni, i

$$\cup_{i=1}^{\infty}[i, i+1) = [0, \infty),$$

imamo

$$\mathbb{P}([0,\infty)) = \mathbb{P}(\cup A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1/3)^i = \frac{1/3}{1-1/3} = \boxed{0.5000}.$$

2.1 Neka su A i B disjunktni događaji takvi da je $\mathbb{P}(A) = 0.1$ i $\mathbb{P}(B) = 0.7$. Izračunati $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Rešenje Pošto su A i B dijunktni, verovatnoća unije je zbir verovatnoća

$$0.1 + 0.7 = \boxed{0.8000}$$

2.3 Neka je $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.8$ i $\mathbb{P}(AB) = 0.3$. Izračunati $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Rešenje Koristeći princip uključivanja/isključivanja imamo

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = 0.4 + 0.8 - 0.3 = \boxed{0.9000}$$

2.5 Ako je $\mathbb{P}([0,3]) = 0.3$ i $\mathbb{P}([5,9]) = 0.6$, koliko je $\mathbb{P}([0,3] \cup [5,9])$?

Rešenje Pošto je verovatnoća mera i intervali $[0,3]$ i $[5,9]$ su disjunktni, onda je

$$\mathbb{P}([0,3]) + \mathbb{P}([5,9]) = 0.3 + 0.6 = \boxed{0.9000}.$$

2.7 Neka je $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 0.2$. Oceniti odozgo $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

Rešenje Iz gornje granice za uniju imamo, $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 0.2 + 0.2 + 0.2 = \boxed{0.6000}$.

2.9 Pretpostavimo da je poštena kockica, sa stranama obeleženim $\{1, 2, \ldots, 6\}$, bačena tri puta. Postoji mnogo mogućih ishoda, npr. $(2, 3, 3)$ je jedan mogući ishod.

a) Koliko je mogućih ishoda?

b) Ako je svaki ishod podjednako verovatan, kolika mora biti verovatnoća svakog ishoda?

c) Kolika je šansa da dobijete sve šestice na tri bacanja?

d) Kolika je šansa da ne dobijete sve šestice na tri bacanja?

Rešenje

a) Ima $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ mogućih ishoda.

b) Primetimo
$$\mathbb{P}(1,1,1) + \mathbb{P}(1,1,2) + \cdots + \mathbb{P}(6,6,6) = 1.$$
Ako svaki od 216 ishoda ima istu verovatnoću, to znači da svaki ishod mora imati verovatnoću $1/216$. Dakle $1/216 = \boxed{0.004629\ldots}$.

c) Prema poslednjem argumentu, $\mathbb{P}(6,6,6) = \boxed{0.004629\ldots}$.

d) Prema pravilu komplementa, ovo je jednako

$$1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216} = \boxed{0.9953\ldots}.$$

2.11 $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.3$. Koliko je $\mathbb{P}(A^C B^C)$?

Rešenje Prisetimo se DeMorganovih zakona: $(A \cup B)^C = A^C B^C$. Onda

$$\mathbb{P}(A^C B^C) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - 0.3 = \boxed{0.7000}.$$

2.13 Neka je $\mathbb{P}(A \in [0,3]) = 1$, $\mathbb{P}(A \in [1,2]) = 0.3$ i $\mathbb{P}(A \in [2,3]) = 0.6$. Izračunati $\mathbb{P}(A \in [2,5])$.

Rešenje Pošto je $\mathbb{P}(A \in [0,3]) = 1$, onda

$$\mathbb{P}(A \in [2,5]) = \mathbb{P}(A \in [2,5] \cap [0,3]) = \mathbb{P}(A \in [2,3]) = \boxed{0.6000}.$$

3.1 Neka je $U \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4,5,6\})$. Koliko je $\mathbb{P}(U \leq 4)$?

Rešenje Postoje četiri vrednosti koje su manje jednake 4: $(\{1,2,3,4\})$. Ukupno ima šest vrednosti. Zbog uniformnosti odgovor je $4/6 = \boxed{0.6666\ldots}$.

3.3 Neka je $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{d,e\}$. Odredi $A \times B$.

Rešenje Ovaj skup se sastoji od šest vektora:

$$\boxed{A \times B = \{(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)\}.}$$

3.5 Neka je $W \sim \mathsf{Unif}(\{a,b,c,d\})$. Naći $\mathbb{P}(W \in \{a,c\})$.

Rešenje Pošto je W uniformna nad konačnim skupom,

$$\mathbb{P}(W \in \{a,c\}) = \frac{\#(\{a,c\})}{\#(\{a,b,c,d\})} = \frac{2}{4} = \boxed{0.5000}.$$

3.7 Neka su $X_1 \sim \mathsf{Unif}(\{1,\ldots,6\})$ i $X_2 \sim \mathsf{Unif}(\{1,\ldots,6\})$ nezavisne. Koliko je onda $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 6)$?

Rešenje Od 36 mogućnosti u $\{1,\ldots,6\} \times \{1,\ldots,6\}$, ima njih 5 koje daju zbir 6:

$$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1).$$

Pošto su obe X_1 i X_2 uniformne, svaka od ove 36 mogućnosti su podjednako verovatne e odgovor je dakle $5/36 \approx \boxed{0.1388}$.

3.9 Pretpostavimo da bacam 3 poštene šestostrane kockice tako da je svaki ishod jednako verovatan i nazovimo ishod (X_1, X_2, X_3). Neka je S najmanji od dobijenih brojeva. Za $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, naći $\mathbb{P}(S = i)$.

Rešenje Trik za rešavanje problema minimuma je da se posmatra $\mathbb{P}(S \geq 2)$. Da bi se ovo dogodilo, X_1, X_2 i X_3 moraju svi biti veí jednaki 2. Ovo se dešava sa verovatnoćom $(5/6)^3$. Sad pogledajmo $\mathbb{P}(S \geq 3)$. Ovde

$$\mathbb{P}(S \geq 3) = \mathbb{P}(X_1, X_2, X_3 \geq 3) = \left(\frac{4}{6}\right)^3.$$

Sledeće, primetimo

$$\{S \geq 2\} = \{S \geq 3\} \cup \{S = 2\}.$$

Poslednja sve događaja su disjunktna, tako da je

$$\mathbb{P}(S \geq 2) = \mathbb{P}(S \geq 3) + \mathbb{P}(S = 2).$$

Dakle

$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(S \geq 2) - \mathbb{P}(S \geq 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3.$$

Generalno, za $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$,

$$\mathbb{P}(S = i) = \left(\frac{6 - i + 1}{6}\right)^3 - \left(\frac{6 - i}{6}\right)^3$$

što daje rešenje:

i	$\mathbb{P}(S = i)$
1	0.4212
2	0.2824
3	0.1712
4	0.08796
5	0.03240
6	0.004629

3.11 Dokazati da je $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ diskretan skup.

Rešenje Neka je $f(i) = i + 1$. I neka je $j \in \{2, 3, 4, 5 \ldots\}$. Pošto je $f(j - 1) = j$ i $j - 1 \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, f je surjektivna na $\{2, 3, \ldots\}$. Dakle $\{2, 3, \ldots\}$ je diskretan.

4.1 Neka je $W \sim \text{Unif}([-3, 3])$.

a) Odrediti $\mathbb{P}(W \in [-1, 2])$.

b) Odrediti $\mathbb{P}(W \in [-5, 0])$.

Rešenje

a) Ovde je $[-1, 2] \subseteq [-3, 3]$, i rešenje je

$$\mathbb{P}(W \in [-1, 2]) = \frac{m([-1, 2])}{m([-3, 3])} = \frac{2 - (-1)}{3 - (-3)} = \frac{3}{6} = \boxed{0.5000}.$$

b) Ovde je $[-5, 0] = [-5, -3) \cup [-3, 3]$. Pošto je $[-5, -3) \cap [-3, 3] = \emptyset$, važi da je $\mathbb{P}(W \in [-5, -3)) = 0$. Dakle

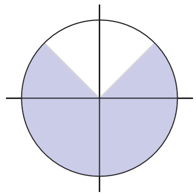
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W \in [-5, 0]) &= \mathbb{P}(W \in [-5, -3)) + \mathbb{P}(W \in [-3, 0]) \\ &= 0 + \frac{0 - (-3)}{3 - (-3)} = \frac{3}{6} = \boxed{0.5000}.\end{aligned}$$

4.3 Neka je tačka (U_1, U_2) izabrana uniformno iz jediničnog kruga

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Koja je verovatnoća da je $|U_1| \geq U_2$?

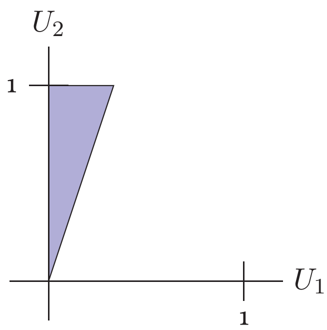
Rešenje Ako je $|x| \geq y$, onda $x \geq y$ or $-x \geq y$. Oblast onda izgleda ovako



Osenčena površina je 3/4 kruga tako da je verovatnoća jednaka $\boxed{0.7500}$.

4.5 Neka su U_1 i U_2 nezavisne slučajne promenljive, unoformne na $[0, 1]$. Koja je verovatnoća da je $U_2 \geq 3U_1$?

Rešenje Stavljanjem U_1 na horizontalnu osu, a U_2 na vertikalnu dobijamo osenčenu oblast gde važi da je $U_2 \geq 3U_1$



Površina osenčene oblasti je $(1/2)(1/3)(1) = 1/6$ a površina celog jedininičnog kvadrata je 1, tako da je tražena verovatnoća jednaka $(1/6)/1 \approx \boxed{0.1666}$.

4.7 Neka je $R \sim \text{Unif}([0, 1])$.

a) Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(R \leq 0.4)$?

b) Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(R \leq 1.4)$?

c) Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(R \leq -0.4)$?

Rešenje

a) To je dužina intervala $[0, 0.4]$ (što je jednako 0.4) podeljeno sa dužinom intervala $[0, 1]$ (što je jednako 1). Dakle $\boxed{0.4000}$.

b) Pošto je $R \in [0, 1]$ uvek, odgovor je $\boxed{1}$.

c) Pošto je R veé jednako 0, odgovor je $\boxed{0}$.

5.1 Uzmimo da je $U \sim \text{Unif}([0, 1])$ i $A = -\ln(U)/2$.

a) Naći $\mathbb{P}(A \geq 2)$.

b) Naći $\mathbb{P}(A \geq -2)$.

c) Za $a \geq 0$, naći $\mathbb{P}(A \geq a)$.

d) Za $a < 0$, naći $\mathbb{P}(A \geq a)$.

Rešenje

a) Iskoristićemo da je $x \mapsto -x$ opadajuća funkcija a $x \mapsto \exp(x)$ rastuća. Onda je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \geq 2) &= \mathbb{P}(-\ln(U)/2 \geq 2)\\ &= \mathbb{P}(\ln(U) \leq -4)\\ &= \mathbb{P}(U \leq \exp(-4))\\ &= \mathbb{P}(U \in (-\infty, \exp(-4)] \cap [0,1])\\ &= \mathbb{P}(U \in [0, \exp(-4)]) \approx \boxed{0.01831}.\end{aligned}$$

b) Kao u prethodnom zadatku

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \geq -2) &= \mathbb{P}(-\ln(U)/2 \geq -2)\\ &= \mathbb{P}(\ln(U) \leq 4)\\ &= \mathbb{P}(U \leq \exp(4))\\ &= \mathbb{P}(U \in (-\infty, e^4] \cap [0,1]) = \mathbb{P}(U \in [0,1]) = \boxed{1}.\end{aligned}$$

c) Za $a \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \geq a) &= \mathbb{P}(-\ln(U)/2 \geq a)\\ &= \mathbb{P}(\ln(U) \geq -2a)\\ &= \mathbb{P}(U \geq \exp(-2a)) = \boxed{\exp(-2a)}.\end{aligned}$$

d) Za $a \leq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \geq a) &= \mathbb{P}(-\ln(U)/2 \geq a)\\ &= \mathbb{P}(\ln(U) \leq -2a)\\ &= \mathbb{P}(U \leq \exp(-2a)) = \boxed{1}.\end{aligned}$$

5.3 Neka je $U \sim \mathsf{Unif}([-1,1])$. Naći cdf za $1 - U^2$.

Rešenje Za $U \in [-1,1]$, $U^2 \in [0,1]$ i $1 - U^2 \in [0,1]$. Dakle $\mathrm{cdf}_{1-U^2}(a) = 0$ za $a < 0$ i $\mathrm{cdf}_{1-U^2}(a) = 1$ za $a > 1$. Uzmimo $a \in [0,1]$. Onda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 - U^2 \leq a) &= \mathbb{P}(1 - a \leq U^2)\\ &= \mathbb{P}((\sqrt{1-a} \leq U) \vee (U \leq -\sqrt{1-a}))\\ &= \mathbb{P}((\sqrt{1-a} \leq U) \vee (U \leq -\sqrt{1-a}), -1 \leq U \leq 1)\\ &= \mathbb{P}((\sqrt{1-a} \leq U \leq 1) \vee (-1 \leq U \leq -\sqrt{1-a}))\\ &= \mathbb{P}(\sqrt{1-a} \leq U \leq 1) + \mathbb{P}(-1 \leq U \leq -\sqrt{1-a}))\\ &= \frac{1-\sqrt{1-a}}{1-(-1)} + \frac{-\sqrt{1-a}-(-1)}{1-(-1)}\\ &= 1 - \sqrt{1-a}.\end{aligned}$$

Dakle, cela f-ja raspodele je data sa

$$\boxed{\mathrm{cdf}_{1-U^2}(a) = (1 - \sqrt{1-a})\mathbb{1}(a \in [0,1]) + \mathbb{1}(a > 1)}.$$

5.5 Neka je je ω uniformna nad $[0,1]$, i uzmimo $X(\omega) = 2\omega + 3$. Naći

a) $\mathbb{P}(X \in [3.5, 4.7])$.
b) $\mathbb{P}(X \in [0,1])$.
c) $\mathbb{P}(X^2 \le 10)$.

Rešenje

a) Pošto je $X = 2\omega + 3$, rešićemo po ω da dobijemo

$$\begin{aligned} 3.5 &\le X \le 4.7 \\ 3.5 &\le 2\omega + 3 \le 4.7 \\ 0.5 &\le 2\omega \le 1.7 \\ 0.25 &\le \omega \le 0.85, \end{aligned}$$

što, s obzirom da je $\omega \sim \text{Unif}([0,1])$, ima šansu da se desi

$$\mathbb{P}(\omega \in [0.25, 0.85]) = 0.85 - 0.25 = \boxed{0.6000}.$$

b) Za $X \in [0,1]$, rešavanje po ω daje $\omega \in [-3/2, -1]$. Šansa da se ovo desi je $\boxed{0}$.

c) Pošto je $X \ge 0$, imamo

$$\begin{aligned} X^2 &\le 10 \\ X &\le \sqrt{10} \\ 2\omega + 3 &\le \sqrt{10} \\ \omega &\le (\sqrt{10} - 3)/2 \approx \boxed{0.05409}. \end{aligned}$$

5.7 Uzmimo $U \sim \text{Unif}([-1,0])$.

a) Neka je $X = U^2$. Naći cdf za X.
b) Naći cdf za U.

Rešenje

a) Kao i uvek, počinjemo tako što zamenimo X funkcijom od U.

$$\mathbb{P}(X \le a) = \mathbb{P}(U^2 \le a)$$

Ovo je 0 ako je $a < 0$ pošto je $U^2 \ge 0$. Pretpostavimo da je $a \ge 0$. Onda

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \le a) &= \mathbb{P}(-\sqrt{a} \le U \le \sqrt{a}) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{a} \le U \le \sqrt{a}, -1 \le U \le 0) \\ &= \mathbb{P}(\max(-1, -\sqrt{a}) \le U \le 0) \\ &= \frac{0 - \max(-1, -\sqrt{a})}{0 - (-1)} \\ &= \min(1, \sqrt{a}). \end{aligned}$$

Spajanje ovoga daje:

$$\boxed{\text{cdf}_X(a) = \sqrt{a}\mathbb{1}(a \in [0,1]) + \mathbb{1}(a > 1).}$$

b) Primetimo da je za $U \in [-1, 0]$, $U^2 \in [0, 1]$. Dakle za $a > 1$, $\mathbb{P}(U \le a) = 1$ i za $a < 0$, $\mathbb{P}(U \le a) = 0$. Zato uzmimo $a \in [0, 1]$. Prisetimo se da je $\sqrt{c^2} = |c|$ i za $U \in [-1, 0]$, $|U| = -U$ daje

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le a) &= \mathbb{P}(U^2 \le a) \\
&= \mathbb{P}(\sqrt{U^2} \le \sqrt{a}) \\
&= \mathbb{P}(|U| \le \sqrt{a}) \\
&= \mathbb{P}(-U \le \sqrt{a}) \\
&= \mathbb{P}(U \ge -\sqrt{a}) \\
&= 1 - (-\sqrt{a}) = 1 + a.
\end{aligned}$$

Sve u svemu imamo

$$\boxed{\mathrm{cdf}_Y(a) = (1 + \sqrt{a})\mathbb{1}(a \in [0, 1]) + \mathbb{1}(a > 1).}$$

c) Ovde je

$$\mathbb{P}(U \le a) = \frac{a - (-1)}{0 - (-1)} = 1 + a$$

Ako je $a < -1$ onda $\mathbb{P}(U \le a) = 0$ i za $a > 0$, $\mathbb{P}(U \le a) = 1$. Dakle

$$\boxed{\mathrm{cdf}_U(a) = (1 + a)\mathbb{1}(a \in [0, 1]) + \mathbb{1}(a > 1)}.$$

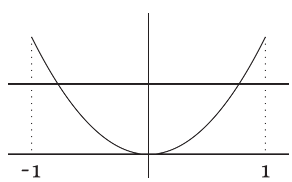
5.9 Neka je $G \sim \mathrm{Geo}(p)$. Za i vrednost u skupu $\{1, 2, 3 \ldots\}$, koliko je $\mathbb{P}(G = i)$?

Rešenje Da bi G bilo jednako i, sve $U_1, \ldots, U_{i-1}$ moraju biti veće od p, i $U_i \le p$. Tako

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G = i) &= \mathbb{P}(U_1 > p, U_2 > p, \ldots, U_{i-1} > p, U_i \le p) \\
&= (1 - p)(1 - p) \cdots (1 - p)p \\
&= \boxed{(1 - p)^{i-1} p}.
\end{aligned}$$

5.11 Neka je $U \in [-1, 1]$. Koliko je $\mathbb{P}(U^2 \ge 0.6)$?

Rešenje Grafik U^2 izgleda kao

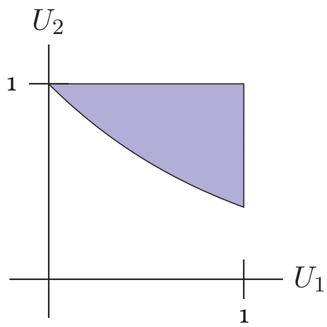


Primetimo da je $U^2 \ge 0.6$ za $U \ge \sqrt{0.6}$ i $U \le -\sqrt{0.6}$. Tako

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U^2 \ge 0.6) &= \mathbb{P}(U \ge \sqrt{0.6}) + \mathbb{P}(U \le -\sqrt{0.6}) \\
&= \frac{1 - \sqrt{0.6}}{1 - (-1)} + \frac{-\sqrt{0.6} - (-1)}{1 - (-1)} \\
&= \boxed{0.2254}.
\end{aligned}$$

5.13 Razmotrite verovatnoću da za nezavisne slučajne promenljive $\mathsf{Exp}(1)$ i $\mathsf{Unif}([0,1])$, druga promenljiva bude veća od prve. Da bismo to pronašli, neka U_1 i U_2 budu nezavisne i identično distribuirane promenljive sa $\mathsf{Unif}([0,1])$. Zatim postavite $T = -\ln(U_2)$. Zatim pronađite $\mathbb{P}(U_1 \geq T)$.

Rešenje Ovo je isto kao nalaženje površine oblasti $\{U_1 \geq -\ln(U_2)\}$, or $\{-U_1 \leq \ln(U_2)\}$, or $\{U_2 \geq \exp(-U_1)\}$. Grafički, ova regija izgleda kao:



Onda je površina jednaka

$$\begin{aligned} \text{area} &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=\exp(-x)}^{1} 1 \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^{1} (1 - \exp(-x)) \, dx \\ &= x + \exp(-x)|_0^1 \\ &= 1/e = \boxed{0.3678\ldots}. \end{aligned}$$

5.15 Neka su $B \sim \mathsf{Bern}(p)$ i $T \sim \mathsf{Exp}(1)$ nezavisne slučajne promenljive. Naći $\mathbb{P}(T \geq B)$.

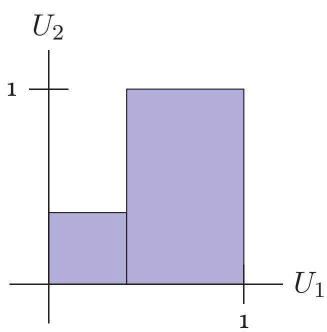
Rešenje Neka je $B = \mathbb{1}(U_1 \leq p)$, i $T = -\ln(U_2)$. Onda ako je $U_1 \leq p$, posmatramo

$$\mathbb{P}(-\ln(U_2) \geq 1) = \mathbb{P}(U_2 \leq \exp(-1)) = \exp(-1),$$

a ako je $U_1 > p$, posmatramo

$$\mathbb{P}(-\ln(U_2) \geq 0) = \mathbb{P}(U_2 \leq \exp(-0)) = 1.$$

Dakle, oblast izgleda kao:



i površina je

$$(1-p)(1)+(p)(exp(-1)) = \boxed{1-p-p/e}.$$

5.17 Vreme do radioaktivnog raspada pojedinačnog atoma je eksponencijalno raspoređeno sa stopom λ. Ako je T vreme do raspada čestice, poluživot t_{hl} je vreme takvo da važi $\mathbb{P}(T \geq t_{\text{hl}}) = 1/2$. Poluživot za atom uranijuma 238 je 4.5 milijardi godina.

a) Koliko je λ?

b) Ako je Zemlja stara 4.2 milijarde godina, koja je verovatnoća da je atom U-238 prisutan pri rođenju planete i dalje netaknut?

Rešenje

a) Setimo se da je za eksponencijalnu slučajnu promenljivu medijana jednaka $\ln(2)/\lambda$. Dakle, $\ln(2)/\lambda = 4.5$ milijardi godina, što čini $\boxed{\lambda \approx 0.1540 \text{ po milijardi godina}}$.

b) Funkcija raspodele ekponencijalne slučajne promenljive sa stopom λ je $F_T(a) = (1-\exp(-\lambda a))\mathbb{1}(T \geq 0)$. Tako je $\mathbb{P}(T > 4.5 \text{ billion years})$ jednako

$$\mathbb{P}(T > 4.5) = \exp(-4.2(\ln(2)/4.5)) = 2^{-4.2/4.5} = \boxed{0.5236\ldots}.$$

(Šta ovo implicira je da je otprilike 52.36% prvobitnog U-238 na Zemlji i dalje netaknuto. Ostatak je prošao radioaktivni raspad.)

6.1 Neka je $\mathbb{P}(A|B) = 0.3$ i $\mathbb{P}(B) = 0.8$. Koliko je $\mathbb{P}(AB)$?

Rešenje Iz formule za uslovnu verovatnoću, ovo je

$$\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = (0.3)(0.8) = \boxed{0.2400}.$$

6.3 Pretpostavimo $\mathbb{P}(A) = 0.3$ i $\mathbb{P}(B) = 0.5$, i znamo da su A i B nezavisni. Koja je vrednost $\mathbb{P}(A|B)$?

Rešenje Pošto su A i B nezavisni,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) = \boxed{0.3000}.$$

6.5 Neka je $X \sim \textsf{Unif}(\{1,2,3,4,5,6\})$.

a) Koliko je $\mathbb{P}(X = 5|X \geq 3)$?

b) Koliko je $\mathbb{P}(X = 5|X \geq 6)$?

Rešenje

a) Koristeći pravilo da je $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \text{ and } B)/\mathbb{P}(B)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 5|X \geq 3) &= \frac{\mathbb{P}(X = 5, X \geq 3)}{\mathbb{P}(X \geq 3)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = 5)}{\mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6)} \\
&= \frac{1/6}{1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6} \\
&= \frac{1}{4} = \boxed{0.2500}.
\end{aligned}$$

b) Slično kao u poslednjem delu:

$$\mathbb{P}(X = 5|X \geq 6) = \frac{\mathbb{P}(X = 5, X \geq 6)}{\mathbb{P}(X \geq 3)}$$

Ali ovde X ne može biti u isto vreme i jednako 5 i bar 6! Tako $\mathbb{P}(X = 5, X \geq 6) = 0$, i ukupna verovatnoća je $\boxed{0}$.

6.7 Neka je $X \sim \text{Unif}(\Omega)$, gde je Ω konačan skup. Neka je $A \subseteq \Omega$. Neka Y ima istu distribuciju kao i X, uz uslov da je $X \in A$. Dokazati da važi $Y \sim \text{Unif}(A)$.

Rešenje Da bi pokazali da je $Y \sim \text{Unif}(A)$, dovoljno je da pokažemo da je $(\forall a \in A)(\mathbb{P}(Y = a) = 1/\#(A))$.

Proof. Neka je $a \in A$. Onda

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = a) &= \mathbb{P}(X = a|X \in A) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = a, X \in A)}{\mathbb{P}(X \in A)} \\
&= \frac{1/\#(\Omega)}{\#(A)/\#(\Omega)} \\
&= \frac{1}{\#(A)},
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

6.9 Laboratorija povremeno ima manje curenje hemikalija u eksperimentalnom prostoru. Svako curenje je nezavisno od drugih i ima 90% šanse da bude bezopasno i 10% šanse da bude otrovno. Direktorka laboratorije ima na raspolaganju dva bespilotna drona. Prvi dron može da detektuje da li ima otrovnih curenja u laboratoriji ili ne. Drugi dron može da prebroji broj curenja prisutnih u laboratoriji.

Dronovi su poslati: prvi izveštava da postoji barem jedno otrovno curenje u laboratoriji. Drugi dron izveštava da se u laboratoriji tačno nalaze tri curenja.

Uslovljeno ovom informacijom, koja je verovatnoća da postoji tačno jedno otrovno curenje i dva bezopasna curenja?

Rešenje Drugi dron je javio da postoje tri anomalije. Neka su $X_1, X_2, X_3 \sim \text{Bern}(0.1)$ iid. Onda će $X_i = 1$ da indikuje da je curenje broj i otrovno, a $X_i = 0$ da označi da je bezopasno.

Onda imamo pitanje: Koliko je $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 1|X_1 + X_2 + X_3 \geq 0)$? Koristimo formulu za uslovnu verovatnoću: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A, B)/\mathbb{P}(B)$. U ovom slučaju, $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ povlači $X_1 + X_2 + X_3 \geq 0$, tako da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 1|X_1 + X_2 + X_3 \geq 0) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 \geq 0)} \\
&= \frac{\binom{3}{1}(0.1)^1(0.9)^2}{1 - \mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 0)} \\
&= \frac{3(0.1)^1(0.9)^2}{1 - (0.9)^3} \\
&\approx \boxed{0.8966}.
\end{aligned}$$

6.11 Za $U \sim \mathsf{Unif}([2, 10]$, koliko je $\mathbb{P}(U \le 3|U \le 5)$?

Rešenje Koristeći našu formulu

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U \le 3|U \le 5) &= \frac{\mathbb{P}(U \le 3, U \le 5)}{\mathbb{P}(U \le 5} \\ &= \frac{(3-2)/(10-2)}{(5-2)/(10-2)} = \frac{1}{3} \approx \boxed{0.3333}.\end{aligned}$$

7.1 Neka je $X \sim \mathsf{Bin}(10, 0.2)$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(X \ge 2)$?

Rešenje U ovom slučaju je korisno poći od verovatnoće komplementa:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \ge 2) &= 1 - \mathbb{P}(X \le 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.2^0 0.8^{10} - \binom{10}{1} 0.2^1 0.8^9 \\ &\approx \boxed{0.6241\ldots}.\end{aligned}$$

7.3 a) Koliko je 5 nad 2?

b) Na koliko načina mogu da se rasporede slova AABBB?

Rešenje

a) Prema našoj formuli, ovo je

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \boxed{10}.$$

b) Treba da izaberemo na koje dve, od pet, pozicije ćemo staviti slovo A, što možemo da uradimo na 5 nad 2 načina, tj $\boxed{10}$ kao ranije.

7.5 Koliko nizova sastavljenih od slova F i S su dužine 10 i imaju tačno 8 slova S?

Rešenje Ovo je jednostavno binomni koeficijent 10 nad 8. Primetite da kad zapisujemo količnik faktorijela mnogi faktori se skrate što olakšava račun.

$$\binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 9 = \boxed{45}.$$

Možemo ovo proveriti u Wolfram Alpha koristeći `10 choose 8`.

7.7 Neka je $N \sim \mathsf{Bin}(10, 0.3)$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(N = 8)$?

Rešenje Koristeći formulu za binomne verovatnoće,

$$\mathbb{P}(N = 8) = \binom{10}{8} 0.3^8 (0.7)^{10-8} \approx \boxed{0.001446}.$$

Možemo da proverimo ovaj rezultat u R sa `dbinom(8,10,0.3)`.

7.9 Pretpostavimo da je $[X|N] \sim \textsf{Unif}(\{1, 2, 3, \ldots, N\})$ i da $N \sim \textsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$. Kolika je verovatnoća

$$\mathbb{P}(N = 3|X = 2)?$$

Rešenje Koristeći Bajesovo pravilo, to je

$$\mathbb{P}(N = 3|X = 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 2|N = 3)\mathbb{P}(N = 3)}{\mathbb{P}(X = 2)}.$$

Brojilac je $(1/3)(1/6)$, a imenilac

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 2|N = 1)\mathbb{P}(N = 1) + \mathbb{P}(X = 2|N = 2)\mathbb{P}(N = 2) + \cdots +\\ \mathbb{P}(X = 2|N = 6)\mathbb{P}(N = 6)\\ = 0 + (1/2)(1/6) + (1/3)(1/6) + (1/4)(1/6) + (1/5)(1/6) + (1/6)(1/6).\end{aligned}$$

Skraćivanjema fatora $1/6$, rešenje je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = 3|X = 2) &= \frac{(1/3)}{(1/2) + (1/3) + \cdots + (1/6)}\\ &= \frac{20}{87} \approx \boxed{0.2298}.\end{aligned}$$

7.11 Autotomic Industries proizvodi dve vrste leka protiv bola koje ćemo, radi jednostavnosti, ovde zvati A i B. Tip A ublažava bol kod 40% pacijenata, dok tip B ublažava bol kod 20% pacijenata.

Pacijent uzima jedan od lekova protiv bolova (ne znaju koji tip) i ublažava im bol. Koja je verovatnoća da su koristili tip A?

Rešenje Neka je P događaj da je bol uminuo. Onda

$$\mathbb{P}(P|A) = 0.4, \quad \mathbb{P}(P|B) = 0.2.$$

Po Bajesovom pravilu,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|P) &= \frac{\mathbb{P}(P|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(P)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(P|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(AP) + \mathbb{P}(BP)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(P|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(P|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(P|B)\mathbb{P}(B)}.\end{aligned}$$

Pošto nemamo informacije koje bi ukazivale na drugačije, pretpostavićemo da je ta osoba podjednako verovatno uzela tip A ili B,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|P) &= \frac{(0.4)(1/2)}{(0.4)(1/2) + (0.2)(1/2)}\\ &= \frac{2}{3} = \boxed{0.6666}.\end{aligned}$$

7.13 Opklade na crveno i crno na stolu za rulet isplaćuju se po jednakim kvotama, što znači da ako uložite x dolara i pobedite, dobijate nazad svoj ulog od x dolara plus još x dolara. Ako izgubite, onda gubite svoj ulog od x dolara.

Pretpostavimo da na ruletu 20 puta uzastopno stavljate isti ulog na crveno. Na točku američkog ruleta ima 38 polja od kojih su 18 crvena, a podjednako je verovatno da će loptica sleteti u bilo koje polje.

a) Nađite verovatnoću da nakon dvadesete ruke budete u plusu (dakle, imate više novca nego kada ste počeli).

b) Nađite verovatnoću da na kraju dvadesete ruke budete u minusu (imate manje novca nego kada ste počeli).

c) Nađite verovatnoću da ste na kraju dvadesete ruke na nuli.

Rešenje

a) Neka je B broj puta kad ste pobedili. Zatim, pošto je svako polje podjednako verovatno, postoji šansa od $18/38$ za pobedu, što znači $B \sim \mathsf{Bin}(20, 18/38)$. Da biste bili u plusu, morate imati više od 10 pobeda, dakle

$$\mathbb{P}(B > 10) = 1 - \mathbb{P}(B \leq 10) = \boxed{0.3223} \text{ (koristeći R).}$$

b) Da bi bili u minusu, mora da ste pobedili u najviše 9 ruku, i

$$\mathbb{P}(B \leq 9) \approx \boxed{0.5062} \text{ (koristeći R).}$$

c) Na kraju, ali ne i najmanje važno, da biste ostvarili čak i nula rezultat, morate dobiti tačno 10 ruku, što se dešava sa verovatnoćom

$$\mathbb{P}(B = 10) \approx \boxed{0.1713} \text{ (koristeći R).}$$

8.1 Neka je $X = \sqrt{U}$ gde $U \sim \mathsf{Unif}([0, 1])$. Naći gustinu za X.

Rešenje Prvo pronađite f-ju raspodele: $U \in [0, 1] \Rightarrow X \in [0, 1]$, pa $\mathrm{cdf}_X(a) = 0$ za $a < 0$ i $\mathrm{cdf}_X(a) = 1$ za $a > 1$. U oba ova područja, izvod daje 0.

Neka je $a \in [0, 1]$. Tada važi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq a) &= \mathbb{P}(\sqrt{U} \leq a) \\ &= \mathbb{P}(U \leq a^2) \\ &= a^2.\end{aligned}$$

Stoga, gustina za $a \in [0, 1]$ je $[a^2]' = 2a$. Konačan odgovor je

$$\boxed{f_X(a) = 2a\mathbb{1}(a \in [0, 1])}.$$

8.3 Neka je $f_X(s) = \exp(-s)[1 - \exp(-2)]^{-1}\mathbb{1}(s \in [0, 2])$.

a) Koliko je $\mathbb{P}(X \geq 1.1)$?

b) Koliko je $\mathbb{P}(X \leq -0.5)$?

c) Nacrtajte grafik F_X.

Rešenje

a) Ovo se nalazi integralom

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 1.1) &= \int_{1.1}^{\infty} \frac{\exp(-s)}{1-\exp(-2)} \mathbb{1}(s \in [0,2])\, ds \\ &= \int_{1.1}^{2} \frac{\exp(-s)}{1-\exp(-2)}\, ds \\ &= \frac{\exp(-1.1)-\exp(-2)}{1-\exp(-2)} \approx \boxed{0.2284}.\end{aligned}$$

b) Jednom kad se uključi indikatorska funkcija, integral nestaje! Tako da je odgovor 0.

$$\mathbb{P}(X \leq -0.5) = \int_{1.1}^{\infty} \frac{\exp(-s)}{1-\exp(-2)} \mathbb{1}(s \in [0,2])\, ds = \boxed{0}.$$

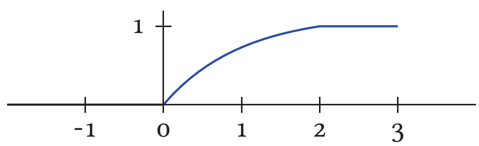
c) Zapravo, za bilo koje $a < 0$, $F_X(a) = 0$. Za bilo koje $a > 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq a) &= \int_{-\infty}^{a} \frac{\exp(-s)}{1-\exp(-2)} \mathbb{1}(s \in [0,2])\, ds \\ &= \int_{0}^{2} \frac{\exp(-s)}{1-\exp(-2)}\, ds = 1.\end{aligned}$$

Za $a \in [0,2]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq a) &= \int_{-\infty}^{a} \frac{\exp(-s)}{1-\exp(-2)} \mathbb{1}(s \in [0,2])\, ds \\ &= \int_{0}^{a} \frac{\exp(-s)}{1-\exp(-2)}\, ds = \frac{1-\exp(-a)}{1-\exp(-2)}.\end{aligned}$$

Dakle grafik funkcije raspodele izgleda ovako



8.5 Pretpostavimo da W ima gustinu $f_W(x) = 3x^2\mathbb{1}[x \in [0,1])$. Koja je gustina za $Y = 3W + 2$?

Rešenje Slučajna promenljiva Y je pomaknuta i skalirana verzija promenljive W. Stoga koristimo rezultat za pomeraj i skaliranje. Imajte na umu da moramo odrediti kako će se promeniti funkcionalni oblik i rešiti unutar indikatorske funkcije. Setimo se da je $x \in [0,1]$ isti događaj kao i $0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned}f_{3W+2}(x) &= f_W((x-2)/3) \\ &= (1/|3|)3((x-2)/3)^2\mathbb{1}(0 \leq (x-2)/3 \leq 1) \\ &= [(x-2)^2/9]\mathbb{1}(0 \leq x-2 \leq 3) \\ &= \boxed{[(x-2)^2/9]\mathbb{1}(2 \leq x \leq 5)}.\end{aligned}$$

Napomena: indikatorska funkcija odražava činjenicu da ako uzmem slučajnu promenljivu koja se kreće negde u intervalu $[0,1]$, pomnožim je sa 3 i dodam 2, rezultirajući broj će biti negde u intervalu $[2,5]$.

8.7 Neka X ima gustinu $f_X(x) = C/(1+x^2)$. Šta je C?

Rešenje Setimo se da je primitivna funkcija od $1/(1+x^2)$ $\arctan(x)$. Dakle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in (-\infty,\infty)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+x^2}\,dx \\ &= C\arctan(x)|_{-\infty}^{\infty} = C[\tau/4 - (-\tau/4)],\end{aligned}$$

Tako je $C\tau/2 = 1$, i $C = 2/\tau \approx \boxed{0.3183}$.

8.9 Pretpostavimo $f_T(t) = 2\exp(-2t)\mathbb{1}(t \geq 0)$. Naći gustinu za $2T+1$.

Rešenje Iz formule za gustinu, podelite sa $|2| = 2$, i zamenite t sa $(t-1)/2$ svuda gde se pojavi:

$$\begin{aligned}f_{2T+1}(t) &= \frac{1}{2}2\exp(-2(t-1)/2)\mathbb{1}((t-1)/2 \geq 0) \\ &= \boxed{\exp(-(t-1))\mathbb{1}(t \geq 1)}.\end{aligned}$$

8.11 Neka je $U \sim \mathsf{Unif}([-2,2])$.

a) Neka je $T = U^3$. Koju gustinu ima T?
b) Neka je $V = U^4$. Koju gustinu ima V?

Rešenje

a) Prvo nađimo f-ju raspodele:

$$\begin{aligned}F_T(a) &= \mathbb{P}(T \leq a) \\ &= \mathbb{P}(U^3 \leq a) \\ &= \mathbb{P}(U \leq a^{1/3}).\end{aligned}$$

Kada je $a^{1/3} \in [-2,2]$, onda $a \in [-8,8]$. Za $a \in [-8,8]$ $\mathbb{P}(U \in [-2,a^{1/3}]) = (a^{1/3} - (-2))/(2-(-2))$. Tako je

$$F_T(a) = (1/4)(2 + a^{1/3})\mathbb{1}(a \in [-8,8]) + \mathbb{1}(a > 1).$$

Sada diferencirajmo da dobijemo gustinu

$$\boxed{f_T(a) = (1/12)a^{-2/3}\mathbb{1}(a \in [-8,8])}.$$

b) Ponovo počinjemo tako što nađemo f-ju raspodele za V:

$$\begin{aligned}F_T(a) &= \mathbb{P}(V \leq a) \\ &= \mathbb{P}(U^4 \leq a) \\ &= \mathbb{P}(-a^{1/4} \leq U \leq a^{1/4}) \\ &= F_U(a^{1/4}) - F_U(-a^{1/4}).\end{aligned}$$

Sada diferenciramo obe strane da dobijemo:

$$f_V(a) = f_U(a^{1/4})(1/4)a^{-3/4} - f_U(-a^{1/4})(-1/4)a^{-3/4}.$$

Gustina uniformne je $f_U(b) = (1/4)\mathbb{1}(b \in [-2, 2])$, tako da

$$\begin{aligned} f_V(a) &= [(1/4)(1/4)a^{-3/4} + (1/4)(1/4)a^{-3/4}]\mathbb{1}(-a^{1/4} \in [-2, 2]) \\ &= (1/16)a^{-3/4}\mathbb{1}(a \in [0, 16]) + (1/16)a^{-3/4}\mathbb{1}(a \in [0, 16] \\ &= \boxed{(1/8)a^{-3/4}1(a \in [0, 16])}. \end{aligned}$$

8.13 Pokazati da ako T ima eksponencijalu raspodelu sa stopom λ, tada $\lfloor T \rfloor + 1$ ima geometrijsku raspodelu i pronađite parametar p kao funkciju od λ.

Rešenje Prvo rešite po T, zatim pojednostavite, a potom uporedite sa verovatnoćama za geometrijsku slučajnu promenljivu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lfloor T \rfloor + 1 = i) &= \mathbb{P}(\lfloor T \rfloor = i - 1) \\ &= \mathbb{P}(i - 1 \leq T < i) \\ &= \mathbb{P}(T < i) - \mathbb{P}(T \leq i - 1) \\ &= (1 - e^{-i\lambda}) - (1 - e^{-(i-1)\lambda}) \\ &= e^{\lambda(i-1)}[1 - e^{-\lambda}] \\ &= [1 - e^{-\lambda}](e^{\lambda})^{i-1} \end{aligned}$$

kada je $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ovo je isto kao geometrijska slučajna promenljiva kada je $\boxed{p = 1 - e^{-\lambda}}$.

9.1 Za X sa gustinom $f_X(i) = 0.3\mathbb{1}(i = 1) + 0.7\mathbb{1}(i = 4)$, koliko je $\mathbb{P}(X \leq 2)$?

Rešenje Ovde je gustina u odnosu na meru prebrojavanja tako da je $\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 1) = \boxed{0.3000}$.

9.3 Neka su U_1 i U_2 iid Unif($\{1, 2, 3, 4\}$). Naći gustinu za $U_1 + U_2$.

Rešenje Kako su U_1 i U_2 (sa verovatnoćom 1) uvek u skupu $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, njihov zbir će biti u skupu brojeva $\{2, \ldots, 8\}$.

Sada uzmimo $i \in \{2, \ldots, 8\}$, na primer, $i = 4$. Ovaj događaj može da se desi na tri načina:

$$\{i = 4\} = \{U_1 = 1, U_2 = 3\} \cup \{U_1 = 2, U_2 = 2\} \cup \{U_1 = 3, U_2 = 1\}.$$

Ima šesnaest mogućih ishoda za U_1 i U_2, tako da je $\mathbb{P}(i = 4) = 3/16$. Ostale verovatnoće mogu da se izračunaju na sličan način, što daje:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{U_1+U_2}(i) = &\frac{1}{16}[\mathbb{1}(i = 2) + 2\mathbb{1}(i = 3) + 3\mathbb{1}(i = 4) + 4\mathbb{1}(i = 5) \\ &+ 3\mathbb{1}(i = 6) + 2\mathbb{1}(i = 7) + \mathbb{1}(i = 8).] \end{aligned}}$$

9.5 Pretpostavimo da $X \sim \mathsf{Unif}(\{1,\dots,10\})$. Koji je skup modusa za X?

Rešenje Gustina za X je jednaka $1/10$ za $i \in \{1,\dots,10\}$ i 0 inače. Dakle skup modusa je samo $\boxed{\{1,\dots,10\}}$.

9.7 Pretpostavimo da X ima gustinu $x^2\exp(-x)\mathbb{1}(x \geq 0)$. Naći modus(e) za X.

Rešenje Za $x < 0$, $f_X(x) = 0$, tako da modus ne može biti tu.

Za $x \geq 0$,

$$[f_X(x)]' = [x^2\exp(-x)]' = [x^2]'\exp(-x) + x^2[\exp(-x)]' = \exp(-x)(2x - x^2).$$

Kako je $\exp(-x) > 0$ za sve x, ovaj izraz je pozitivan kada je $2x - x^2 = x(2-x) > 0$ i negativan kada je $2x - x^2 < 0$. Dakle pozitivan je za $x < 2$ i negativan za $x > 2$. Stoga je jedinstveni maksimum (a time i modus) u $\boxed{2}$.

9.9 Pretpostavimo da su $X \sim \mathsf{Exp}(1)$ i $Y \sim \mathsf{Exp}(2)$ nezavisni.

a) Naći funkciju preživljavanja za X.

b) Naći funkciju preživljavanja za Y.

c) Naći $\mathbb{P}(\min(X,Y) \geq 2)$.

Rešenje

a) Ovo je

$$\begin{aligned} S_X(a) &= \mathbb{P}(X > a) \\ &= \mathbb{P}(-\ln(U) > a) \\ &= \mathbb{P}(U < \exp(-a)) \end{aligned}$$

što je 1 za $a < 0$ i $\exp(-a)$ za $a \geq 0$. Dakle

$$\boxed{S_X(a) = \mathbb{1}(a < 0) + \exp(-a)\mathbb{1}(a \geq 0).}$$

b) Ovo je slično računu za X:

$$\begin{aligned} S_Y(a) &= \mathbb{P}(Y > a) \\ &= \mathbb{P}(-\ln(U)/2 > a) \\ &= \mathbb{P}(U < \exp(-2a)) \end{aligned}$$

što je 1 za $a < 0$ i $\exp(-2a)$ za $a \geq 0$. Dakle

$$\boxed{S_Y(a) = \mathbb{1}(a < 0) + \exp(-2a)\mathbb{1}(a \geq 0).}$$

c) Primetimo da pošto su X i Y neprekidne, takav je i $\min(X,Y)$, i

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) \geq 2) = \mathbb{P}(\min(X,Y) > 2) = S_{\min(X,Y)}(2).$$

Koristeći

$$S_{\min(X,Y)}(a) = S_X(a)S_Y(a)$$

daje

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) \geq 2) = \exp(-2)\exp(-2\cdot 2) = \exp(-6) \approx \boxed{0.002478}.$$

10.1 Dato da je $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.4$ i $\mathbb{P}(Y = -1) = 0.6$, koliko je $\mathbb{E}[Y]$?

Rešenje Sabiramo proizvode ishoda i njihovih verovatnoća da bi dobili

$$\mathbb{E}[Y] = (2)(0.4) + (-1)(0.6) = \boxed{0.2000}.$$

10.3 Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X = 2) = 0.3$, $\mathbb{P}(X = 4) = 0.2$ i $\mathbb{P}(X = 5) = 0.5$. Koliko je $\mathbb{E}[X]$?

Rešenje Pošto je X diskretna slučajna promenljiva sabiramo proizvode različitih ishoda sa verovatnoćama tih ishoda:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \{2,4,5\}} x\mathbb{P}(X = x) = (2)(0.3) + (4)(0.2) + (5)(0.5) = \boxed{3.900}.$$

10.5 Neka je $\mathbb{E}[X] = 34$. Koliko je $\mathbb{E}[2X - 5]$?

Rešenje Prema linearnosti očekivanja, ovo je $2\mathbb{E}[X] - 5$, ili $\boxed{63}$.

10.7 Uzmimo da je $X \sim \mathsf{Unif}(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$. Koliko je $\mathbb{E}[X]$?

Rešenje Kako je ova raspodela simetrična oko 0, i $\sum_{i=-2}^{2} i\mathbb{P}(X = i)$ je konačna, to očekivanje je 0.

10.9 Recimo da je $\mathbb{E}[R] = 3$ i $\mathbb{E}[S] = 6$. Koliko je $\mathbb{E}[R - S]$?

Rešenje Zbog linearnosti ovo je

$$\mathbb{E}[R - S] = \mathbb{E}[R] - \mathbb{E}[S] = 3 - 6 = \boxed{-3}.$$

10.11 Uzmimo $U_1, U_2, \ldots \sim \mathsf{Unif}(\{1, 2, 3, 4\})$. Pokazati da je $\lim_{n\to\infty}(U_1 + \cdots + U_n)/n = 2.5$ sa verovatnoćom 1.

Rešenje Primetimo

$$\mathbb{E}[U] = (1/4)(1) + (1/4)(2) + (1/4)(3) + (1/4)(4) = 10/4 = 2.5.$$

Pošto svako U_i ima očekivanje 2.5, jak zakon velikih brojeva nam direktno daje da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} = 2.5$$

sa verovatnoćom 1.

11.1 Za X sa gustinom $12s^2(1 - s)\mathbb{1}(s \in [0, 1])$, naći $\mathbb{E}[X]$.

Rešenje Ovo je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} s f_X(s)\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot 12s^2(1 - s)\mathbb{1}(0 \le s \le 1)\, ds \\
&= \int_0^1 12(s^3 - s^4)\, ds \\
&= 12(s^4/4 - s^5/5) \\
&= 12/20 = \boxed{0.6000}.
\end{aligned}$$

11.3 Pretpostavimo da su $U_1, U_2, \ldots \sim \mathsf{Unif}([0,4])$. Pokazati $\lim_{n\to\infty}(U_1+\cdots+U_n)/n = 2$ sa verovatnoćom 1.

Rešenje Kako svako U_i ima očekivanje 2, prema jakom zakonu velikih brojeva direktno imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_1+\cdots+U_n}{n} = 2$$

sa verovatnoćom 1.

11.5 Za Z sa gustinom

$$f_Z(z) = \tau^{-1/2}\exp(-z^2/2),$$

koristeći integral proverite da je $\mathbb{E}[Z] = 0$.

Rešenje Ovde

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \int_{z=-\infty}^{\infty} z\tau^{-1/2}\exp(-z^2/2)\,dz \\
&= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b \tau^{-1/2} z\exp(-z^2/2)\,dz \\
&= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty} \tau^{-1/2}(-\exp(-z^2/2))|_a^b \\
&= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty} \tau^{-1/2}(\exp(-a^2/2)-\exp(-b^2/2)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

čime je rezultat pokazan.

11.7 Pretpostavimo $\mathbb{P}(X=-1)=0.3$ i $\mathbb{P}(X=1)=0.7$. Koliko je $\mathbb{E}[X^2]$?

Rešenje Ovo je $(-1)^2(0.3)+1^2(0.7) = \boxed{1}$. Naravno, pošto je X^2 uvek jednako 1, rezultat trivijalno sledi!

11.9 Neka X ima gustinu $s\exp(-s^2/2)\mathbb{1}(s\geq 0)$. Naći $\mathbb{E}[X^2]$.

Rešenje Integral je

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{s\in\mathbb{R}} s^2\cdot s\exp(-s^2/2)\mathbb{1}(s\geq 0)\,ds = \int_{s\geq 0} s^3\exp(-s^2/2)\,ds.$$

Da bi rešili, prvo moramo da se oslobodimo nelinearnosti unutar eksponencijalne funkcije. Postavimo tako $t = s^2/2$, onda $dt = s\,ds$, i

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{t\geq 0} s^2\exp(-t)\,dt \\
&= \int_{t\geq 0} 2t\exp(-t)\,dt \\
&= 2\int_{t\geq 0} t\exp(-t)\,dt.
\end{aligned}$$

Mogli bi sada da koristimo parcijalnu integraciju za ovaj poslednji integral ili da prepoznamo da je ovo očekivana vrednost eksponencijalne slučajne promenljive sa stopom 1, i tako je krajnji odgovor $\boxed{2}$.

11.11 Napravimo slučajnu promenljivu W takvu da je $\mathbb{E}[W] = I$, gde je

$$I = \int_{-1}^{1} 2x^2 \, dx.$$

Rešenje Neka je $U \sim \mathsf{Unif}([-1,1])$. Onda $f_U(x) = (1/2)\mathbb{1}(x \in [-1,1])$. Tako je

$$\mathbb{E}[4U^2] = \int_{-1}^{1} (4x^2)(1/2) \, dx = I.$$

Dakle, $\boxed{4U^2}$ radi u ovom slučaju.

11.13 Za slučajnu promenljivu A, *srednja apsolutna devijacija* od A je definisana kao

$$\mathrm{MAD}(A) = \mathbb{E}\left[|A - \mathbb{E}[A]|\right].$$

Neka je $A \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$. Find $\mathrm{MAD}(A)$.

Rešenje Gustina od A je $\lambda \exp(-\lambda a)\mathbb{1}(a \geq 0)$ i ove slučajne promenljive imaju očekivanje 1λ. Dakle

$$\mathrm{MAD}(A) = \int_{s \in \mathbb{R}} |s - 1/\lambda| \lambda \exp(-\lambda s) \mathbb{1}(s \geq 0) \, ds.$$

Kako je $|s - 1/\lambda| = s - 1/\lambda$ za $s \in [1/\lambda, \infty)$, i $|s - 1/\lambda| = 1/\lambda - s$ za $s \in [0, 1/\lambda)$, imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{MAD}(A) &= I_1 + I_2, \\
I_1 &= \int_{s \in [0,1/\lambda]} (1/\lambda - s)\lambda \exp(-\lambda s) \, ds, \\
I_2 &= \int_{s \in [1/\lambda, \infty)} (s - 1/\lambda)\lambda \exp(-\lambda s) \, ds.
\end{aligned}$$

Parcijalna integracija u I_1 nam daje

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{s \in [0,1/\lambda]} (1/\lambda - s)[-\exp(-\lambda s)]' \, ds \\
&= \int_{s \in [0,1/\lambda]} [(1/\lambda - s)(-\exp(-\lambda s))]' - [(1/\lambda - s)]'[-\exp(-\lambda s)] \, ds \\
&= \int_{s \in [0,1/\lambda]} [(1/\lambda - s)(-\exp(-\lambda s))]' - \exp(-\lambda s) \, ds \\
&= [(1/\lambda - s)(-\exp(-\lambda s)) + \exp(-\lambda s)/\lambda] \,|_0^{1/\lambda} \\
&= s \exp(-\lambda s))|_0^{1/\lambda} \\
&= \exp(-1)/\lambda.
\end{aligned}$$

Parcijalna integracija u I_2:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{s \in [1/\lambda, \infty)} -(1/\lambda - s)\lambda \exp(-\lambda s) \, ds \\
&= -s \exp(-\lambda s))|_{1/\lambda}^{\infty} \\
&= \exp(-1)/\lambda.
\end{aligned}$$

Napominjemo da nismo morali ponovo raditi na antiderivaciji jer je integrand bio negativan u odnosu na integrand koji smo pronašli prilikom računanja I_1.

Kada spojimo sve zajedno, dobijemo

$$\mathrm{MAD}(A) = \boxed{2\lambda^{-1}\exp(-1)}$$

11.15 Tri zombija te jure. Svaki od njih trči brzinom koja je nezavisno uniformno raspoređena između 6 i 11 milja na sat.

a) Ako možeš da trčiš brzinom od 10 milja na sat, koja je verovatnoća da ćeš pobeći od zombija?

b) Koja je očekivana brzina najbržeg zombija?

Rešenje

a) Ako su Z_1, Z_2, Z_3 iid $\mathsf{Unif}([6, 11])$, onda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max\{Z_1, Z_2, Z_3\} < 10) &= \mathbb{P}(Z_1 < 10, Z_2 < 10, Z_3 < 10) \\ &= \mathbb{P}(Z_1 \le 10)\mathbb{P}(Z_2 \le 10)\mathbb{P}(Z_3 \le 10) \\ &= \left(\frac{10-6}{11-6}\right)^3 = \boxed{0.5120}.\end{aligned}$$

b) Biće lakše ako napravimo

$$Z_i = 5U_i + 6,$$

gde su U_1, U_2, U_3 iid $\mathsf{Unif}([0, 1])$. Onda

$$\max\{Z_1, Z_2, Z_3\} = \max\{5U_1 + 6, 5U_2 + 6, 5U_3 + 6\} = 5\max\{U_1, U_2, U_3\} + 6.$$

Linearnost očekivanja daje

$$\mathbb{E}[\max\{Z_1, Z_2, Z_3\}] = 5\mathbb{E}[\max\{U_1, U_2, U_3\}] + 6.$$

Sada $Y = \max\{U_1, U_2, U_3\}$ ima f-ju raspodele

$$\mathrm{cdf}_Y(a) = \mathbb{P}(Y \le a) = \mathbb{P}(U_1 \le a)^3 = a^3$$

za $a \in [0, 1]$. Dakle, izvod je

$$\mathrm{pdf}_Y(a) = 3a^2 \mathbb{1}(a \in [0, 1]),$$

i očekivana vrednost je

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} a \cdot 3a^2 \mathbb{1}(a \in [0, 1])\, da = \int_0^1 3a^3\, da = \frac{3}{4}a^4|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Stoga,

$$\mathbb{E}[\max\{Z_1, Z_2, Z_3\}] = 5 \cdot 34 + 6 = \boxed{9.750}.$$

11.17 Uzmimo $U \sim \mathsf{Unif}([0, 2])$.

a) Naći cdf za $X = U^3$.

b) Naći gustinu od X.

c) Naći $\mathbb{E}[X]$.

Rešenje

a) F-ja raspodele za X je

$$\begin{aligned}\mathrm{cdf}_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(U^3 \leq a) = \mathbb{P}(U \leq a^{1/3}) \\ &= \frac{a^{1/3}}{2-0}\mathbb{1}(a^{1/3} \in [0,2]) + \mathbb{1}(a^{1/3} > 2) \\ &= \boxed{\frac{a^{1/3}}{2}\mathbb{1}(a \in [0,8]) + \mathbb{1}(a > 8).}\end{aligned}$$

b) Diferenciranje daje gustinu

$$\boxed{\mathrm{pdf}_X(a) = \frac{1}{6}a^{-2/3}\mathbb{1}(a \in [0,0.8])}.$$

c) Jedno kada postavite integral, to postaje pitanje iz matematičke analize.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} a \cdot \frac{1}{6}a^{-2/3}\mathbb{1}(a \in [0,8])\, da \\ &= \int_0^8 \frac{1}{6}a^{1/3}\, da \\ &= \frac{1}{6}\frac{a^{4/3}}{4/3}\bigg|_0^8 = \frac{1}{8}8^{4/3} = 8^{1/3} = \boxed{2}.\end{aligned}$$

11.19 Pretpostavimo $A \sim \mathsf{Exp}(3)$, tako da A ima gustinu

$$f_A(s) = 3\exp(-3s)\mathbb{1}(s \geq 0).$$

Očekivanje eksponencijalne raspodele je multiplikativni inverz stope, pa je $\mathbb{E}A = 1/3$.

a) Koliko je $\mathbb{E}[2A-1]$?

b) Koliko je $\mathbb{E}[\exp(1.5A)]$?

c) Koja je gustina za $2A-1$?

Rešenje

a) Koristeći linearnost $2(1/3)-1) = -1/3 = \boxed{-0.3333\ldots}$.

b) Koristeći Zakon o nesvesnom statističaru

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(1.5A)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(1.5a)3\exp(-3a)\mathbb{1}(a \geq 0)\, da \\ &= \int_0^{\infty} 3\exp(-1.5a)\, da \\ &= -(3/1.5)\exp(-1.5a)|_0^{\infty} = \boxed{2}.\end{aligned}$$

c) Koristeći pravila za pomeranje i skaliranje:

$$f_{2A-1}(s) = (1/|2|)f_A((s-(-1))/2).$$

Primetimo $\mathbb{1}((s+1)/2 \geq 0) = \mathbb{1}(s \geq -1)$, tako da

$$f_{2A-1}(s) = \boxed{(3/2)\exp(-(3/2)(s+1))\mathbb{1}(s \geq -1)}.$$

12.1 Neka su B_1, B_2 iid Bern(0.3). Uzmimo i da je $\mathbb{P}(N=1) = 0.6$ i $\mathbb{P}(N=2) = 0.4$.

a) Naći gustinu od

$$S = \sum_{i=1}^{N} B_i.$$

b) Naći $\mathbb{E}[S]$ koristeći gustinu.

c) Naći $\mathbb{E}[S]$ koristeći Osnovnu teoremu verovatnoće.

Rešenje

a) Sabiranje jedne ili dve Bernuli dobija se 0, 1 ili 2. Dakle treba da nađemo $\mathbb{P}(S=i)$ za 0, 1 ili 2. Razbijanje na slučajeve nam daje

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=0) &= \mathbb{P}(N=1)\mathbb{P}(B_1=0) + \mathbb{P}(N=2)\mathbb{P}(B_1=B_2=0) \\
&= (0.6)(0.7) + (0.4)(0.7)^2 = 0.616 \\
\mathbb{P}(S=1) &= \mathbb{P}(N=1)\mathbb{P}(B_1=1) + \mathbb{P}(N=1)\mathbb{P}(B_1+B_2=1) \\
&= (0.6)(0.3) + (0.4)(2(0.3)(0.7)) = 0.348 \\
\mathbb{P}(S=2) &= \mathbb{P}(N=2)\mathbb{P}(B_1=B_2=1) \\
&= (0.4)(0.3)^2 = 0.036
\end{aligned}$$

Dakle S ima gustinu

$$\boxed{f_S(i) = 0.616 \cdot \mathbb{1}(i=0) + 0.348 \cdot \mathbb{1}(i=1) + 0.036 \cdot \mathbb{1}(i=2)}.$$

b) Odavde imamo očekivanje

$$0.616(0) + 0.348(1) + 0.036(2) = \boxed{0.4200}.$$

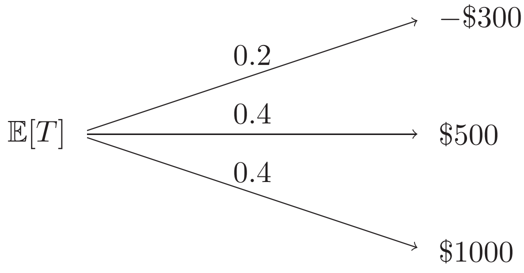
c) Primetimo $\mathbb{E}[B_i] = 0.3$, i tako $\mathbb{E}[S|N] = 0.3N$. Stoga je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] \\
&= \mathbb{E}[0.3N] \\
&= 0.3(1(0.6) + 2(0.4)) \\
&= \boxed{0.4200}.
\end{aligned}$$

12.3 Zabava ima ili malu posećenost (20% šanse), srednju posećenost (40% šanse) ili visoku posećenost (40% šanse). Sa slabom posećenošću prosečan prihod je $-\$300$, sa srednjom $\$500$, i sa visokom $\$1000$.

Nacrtajte stablo očekivanja za izračunavanje prosečnog prihoda zabave.

Rešenje Stablo izgleda ovako:



Odavde dobijamo prosečni prihod

$$(-300)(0.2) + (500)(0.4) + (1000)(0.4) = \boxed{540}.$$

12.5 Pretpostavimo da je vreme do dolaska mušterije (zovimo ga T) eksponencijalna slučajna promenljiva sa parametrom A (tako da $[T|A] \sim \mathsf{Exp}(A)$.) A je slučajna promenljiva uniformna na intervalu $[5, 10]$. Koliko je $\mathbb{E}[T]$?

Rešenje Ovde je $\mathbb{E}[T|A] = 1/A$, Dakle

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[T|A]] \\
&= \mathbb{E}[1/A] \\
&= \int_{a\in\mathbb{R}} (1/a)(1/5)\mathbb{1}(a \in [5, 10])\, da \\
&= \int_5^{10} 1/(5a)\, da \\
&= \ln(10) - \ln(5) = \ln(2) \approx \boxed{0.6931\ldots}.
\end{aligned}$$

13.1 Uzmimo da (X, Y) ima gustinu $(1/60)(x + 2y)\mathbb{1}(x \in [0, 2], y \in [0, 5])$.

a) Naći marginalnu gustinu za X.
b) Naći marginalnu gustinu za Y.
c) Naći $\mathbb{E}[XY]$.

Rešenje

a) Da ovo nađemo, integralimo po y zajedničku gustinu:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{y\in\mathbb{R}} (1/60)(x + 2y)\mathbb{1}(x \in [0, 2], y \in [0, 5])\, dy \\
&= \int_{y=0}^{5} (1/60)(x + 2y)\mathbb{1}(x \in [0, 2])\, dy \\
&= (1/60)(xy + y^2)\mathbb{1}(x \in [0, 2])|_0^5 \\
&= (1/60)(5x + 25)\mathbb{1}(x \in [0, 2]) \\
&= \boxed{(1/12)(x + 5)\mathbb{1}(x \in [0, 2])}.
\end{aligned}$$

b) Da ovo nađemo, integralimo zajedničku gustinu po x :

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{x\in\mathbb{R}} (1/60)(x+2y)\mathbb{1}(x\in[0,2], y\in[0,5])\, dy \\
&= \int_{x=0}^{2} (1/60)(x+2y)\mathbb{1}(y\in[0,5])\, dx \\
&= (1/60)(x^2/2+2yx)\mathbb{1}(y\in[0,5])|_0^2 \\
&= (1/60)(2+4y)\mathbb{1}(y\in[0,5]) \\
&= \boxed{(1/30)(1+2y)\mathbb{1}(y\in[0,5])}.
\end{aligned}$$

c) Ovaj integral je

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} xy\cdot(1/60)(x+2y)\mathbb{1}(x\in[0,2], y\in[0,5])\, d\mathbb{R}^2.$$

U ovom slučaju integrand je uvek nenegativan i Toneli nam dozvoljava da ga razbijemo u dvostruke integrale:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_{x\in[0,2]}\int_{y\in[0,5]} (1/60)(x^2y+2xy^2)\, dy\, dx \\
&= (1/60)\int_{x\in[0,2]} x^2y^2/2+(2/3)(xy^3)|_0^5\, dx \\
&= (1/60)\int_{x\in[0,2]} (25/2)x^2+(250/3)x\, dx \\
&= (1/60)\ \left[(25/6)x^3+(125/3)x^2\right]\Big|_0^2 \\
&= (1/60)\left[(100/3)+(500/3)\right] \\
&= (1/60)(600/3) = 10/3 \approx \boxed{3.3333}.
\end{aligned}$$

13.3 Neka (X,Y) ima gustinu

$$f_{X,Y}(x,y) = (1/1260)x^3y^2\mathbb{1}(x\in\{1,2,3\})\mathbb{1}(y\in\{1,3,5\}.$$

a) Dokazati da su X i Y nezavisni.

b) Koliko je $\mathbb{P}(X=2)$?

Rešenje

a) Primetimo da je

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{1260}x^3y^2\mathbb{1}(x\in\{1,2,3\})\mathbb{1}(y\in\{1,3,5\} \\
&= \left[\frac{x^3}{36}\mathbb{1}(x\in\{1,2,3\})\right]\left[\frac{y^2}{35}\mathbb{1}(y\in\{1,3,5\})\right].
\end{aligned}$$

Kako je svaki faktor u zagradi jedna gustina, jedna koja uključuje samo x a druga samo y, onda X i Y moraju biti nezavisne.

b) Iz gustine za X, ovo je $2^3/36 = 2/9 = \boxed{0.2222\ldots}$.

13.5 Neka je $(X_1, X_2) = (7.314, 2.103)$. Koje su statistike poretka?

Rešenje Biće

$$\boxed{X_{(1)} = 2.103,\ X_{(2)} = 7.314}.$$

13.7 Neka je $(X_1, X_2) = (5.623, 5.623)$. Koje su statistike poretka?

Rešenje Biće

$$\boxed{X_{(1)} = 5.623,\ X_{(2)} = 5.623}.$$

13.9 Pretpostavimo da su statistike poretka $X_{(1)} = 1.3$ i $X_{(2)} = 3.4$. Koje moguće vrednosti može imati početni vektor (X_1, X_2)?

Rešenje Početni vektor bi mogao imati bilo koju od dve permutacije ovih brojeva, to jest

$$\boxed{\{(1.3, 3.4), (3.4, 1.3)\}}.$$

14.1 Neka su $v = (-1, -1, 2)$ i $w = (5, 2, -3)$.

a) Koliko je $v \cdot w$?

b) Šta je $\|v\|$?

Rešenje

a) Ovo je

$$(-1)(5) + (-1)(2) + (2)(-3) = -5 - 2 - 6 = \boxed{-13}.$$

b) Ovo je

$$\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6} = \boxed{2.449\ldots}$$

14.3 Neka je X diskretna sa gustinom $f_X(1) = 0.7$, $f_X(5) = 0.2$, $f_X(10) = 0.1$.

a) Naći $\mathbb{E}[X]$.

b) Naći $\mathrm{SD}[X]$.

Rešenje

a) Ovo je

$$\mathbb{E}[X] = (0.7)(1) + (0.2)(5) + (0.1)(10) = \boxed{2.700}.$$

b) Treba nam drugi momenat:

$$\mathbb{E}[X^2] = (0.7)(1)^2 + (0.2)(5)^2 + (0.1)(10)^2 = 15.7$$

Dakle, standardna devijacija je

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{15.7 - 2.7^2} = \boxed{2.900}.$$

14.5 Pretpostavimo da $U \sim \mathsf{Unif}([0, 10])$.

a) Šta je centrirana slučajna promenljiva U_c?

b) Kolika je varijansa od U?

Rešenje

a) Očekivana vrednost uniformne u intervalu je prosek krajnjih tačaka intervala, tako da je $(0 + 10)/2 = 5$. To čini centriranu slučajnu promenljivu $\boxed{U_c = U - 5}$.

b) Varijansa je očekivana vrednost kvadrata slučajne promenljive minus kvadrat očekivane vrednosti. Tako

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_{x \in \mathbb{R}} x^2 (1/10) \mathbb{1}(x \in [0, 10])\, dx = 10^3/[3(10)] = 100/3$$

so

$$\mathbb{V}(U) = 100/3 - 5^2 = 25/3 = \boxed{8.333\ldots}$$

14.7 Naka je (X, Y) uniformno nad

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Naći $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Rešenje Da bi ovo rešili treba nam $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[X]$ i $\mathbb{E}[Y]$. Ovo vodi ka četiri integrala.

Prvi integral je potreban za pronalaženje mere skupa A.

$$\begin{aligned}
\ell(A) &= \int_{(x,y)} 1\mathbb{1}(x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1)\, d\mathbb{R}^2 \\
&= \int_{x \in [0,1]} \int_{y \in [0,1-x]} 1\, dy\, dx \\
&= \int_{x \in [0,1]} 1 - x\, dx \\
&= x - x^2/2|_0^1 = 1/2,
\end{aligned}$$

odakle je zajednička gustina za X i Y data sa

$$f_{(X,Y)}(x, y) = 2 \cdot \mathbb{1}((x, y) \in A).$$

Sada da pronađemo očekivanja.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_{(x,y)} xy \cdot 2\mathbb{1}(x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1)\, d\mathbb{R}^2 \\
&= \int_{x \in [0,1]} \int_{y \in [0,1-x]} 2xy\, dy\, dx \\
&= \int_{x \in [0,1]} xy^2|_0^{1-x}\, dx \\
&= \int_{x \in [0,1]} [x - 2x^2 + x^3]\, dx \\
&= 1/2 - 2/3 + 1/4 = 1/12.
\end{aligned}$$

Sledeći integral je

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{(x,y)} x \cdot 2\mathbb{1}(x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1)\, d\mathbb{R}^2 \\
&= \int_{x\in[0,1]} \int_{y\in[0,1-x]} 2x\, dy\, dx \\
&= \int_{x\in[0,1]} 2x(1-x)\, dx \\
&= \int_{x\in[0,1]} 2x - 2x^2\, dx \\
&= 1 - 2/3 = 1/3.
\end{aligned}
$$

Poslednji integral je

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \int_{(x,y)} y \cdot 2\mathbb{1}(x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1)\, d\mathbb{R}^2 \\
&= \int_{x\in[0,1]} \int_{y\in[0,1-x]} 2y\, dy\, dx \\
&= \int_{x\in[0,1]} (1-x)^2\, dx \\
&= (1-x)^3/(-3)|_0^1\, dx \\
&= 1/3.
\end{aligned}
$$

Kovarijansa je dakle

$$
\frac{1}{12} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{36} = \boxed{-0.02777\ldots}
$$

14.9 Tačno ili netačno: slučajna promenljiva sa konačnim očekivanjem uvek ima konačnu standardnu devijaciju.

Rešenje Ovo je $\boxed{\text{netačno}}$. Uzmimo $X = 1/\sqrt{U}$, gde je $U \sim \text{Unif}([0,1])$. Onda

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{u\in\mathbb{R}} u^{-1/2}\mathbb{1}(u \in [0,1])\, du \\
&= \int_0^1 u^{-1/2}\, du = u^{1/2}/(1/2)|_0^1 = 2.
\end{aligned}
$$

Međutim,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{u\in real} (u^{-1/2})^2\mathbb{1}(u \in [0,1])\, du \\
&= \int_0^1 u^{-1}\, du = \ln(u)|_0^1 = \infty.
\end{aligned}
$$

Dakle, dok je očekivanje konačno, standardno odstupanje od X nije.

Jedna napomena: istina je da kad god X ima konačno očekivanje, srednje apsolutno odstupanje $\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]$ će biti konačno.

14.11 Za slučajnu promenljivu sa konačnim očekivanjem μ, i standardnom devijacijom σ, *iskrivljenost (skewness)* slučajne promenljive je definisana sa

$$\text{skew}(X) = \mathbb{E}\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right].$$

a) Ako X ima iskrivljenost 3, kolika je iskrivljenost od $2X$?

b) Kolika je iskrivljenost od $-2X$?

Rešenje

a) Očekivanje od $2X$ je 2μ, a standardna devijacija je $|2|\sigma = 2\sigma$. Iskrivljenost je dakle

$$\begin{aligned}\text{skew}(2X) &= \mathbb{E}\left[\frac{(2X-2\mu)^3}{(2\sigma)^3}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right] = \boxed{3}.\end{aligned}$$

b) Ovde je $\mathbb{E}[-2X] = -2\mu$, i standardna devijacija je $|-2|\sigma = 2\sigma$, tako da

$$\begin{aligned}\text{skew}(-2X) &= \mathbb{E}\left[\frac{(-2X+2\mu)^3}{(2\sigma)^3}\right] \\ &= -\mathbb{E}\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right] = \boxed{-3}.\end{aligned}$$

14.13 Naći iskrivljenost od $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$.

Rešenje Nagnutost je

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \sigma^{-3}\mathbb{E}[(U-\mu)^3].$$

Za uniformnu na intervalu $[0,1]$, $\mu = 1/2$ i $\sigma = 12^{1/2}$. Takođe, $Y = (U-1/2) \sim \mathsf{Unif}([-1/2,1/2])$ i

$$12^{-3/2}\mathbb{E}[Y^3] = 12^{-3/2}\int_{-1/2}^{1/2} s^3\, ds = 12^{-3/2}s^4/4|_{-1/2}^{1/2} = 12^{-3/2}[2^{-5}-2^{-5}] = \boxed{0}.$$

Nagnutost je 0 jer je uniformna raspodela simetrična oko svog očekivanja,

14.15 Topper Building Co. trpi broj kašnjenja koji je uniforman na $\{0,1,2,3,4\}$. Svako kašnjenje košta graditelja eksponencijalno vreme sa parametrom 0.3 mesečno. Nađite očekivanje i varijansu ukupnog vremena kašnjenja.

Rešenje Ovde nas interesuju dve slučajne promenljive:

$$\begin{aligned} N &:= \text{broj kašnjenja} \\ T &:= \text{ukupan zbir zakašnjenja.}\end{aligned}$$

Zadatak kaže da je $N \sim \mathsf{Unif}(\{0,1,2,3,4\})$. Dato N, T je zbir N nezavisnih eksponencijalnih slučajnih promenljivih. Ovo daje gama raspodelu:

$$[T|N] \sim \mathsf{Gamma}(N, 0.3).$$

Da nađemo $\mathbb{E}[T]$, uslovljavamo sa N i onda se rešimo uslova tako što uzmemo opet očekivanje:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[T|N]] \\ &= \mathbb{E}[N/0.3] \\ &= (1/0.3)\mathbb{E}[N] \\ &= 2/0.3 \approx \boxed{6.667}.\end{aligned}$$

Za varijansu nam treba $\mathbb{E}[T^2]$. Korisna činjenica je da za svaku slučajnu promenljivu X, $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2$.

Tako

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[T^2|N]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{V}(T|N) + \mathbb{E}[T|N]^2] \\ &= \mathbb{E}[N/0.3^2 + (N/0.3)^2] \\ &= (1/0.3)^2\mathbb{E}[N + N^2] \\ &= (1/0.3)^2[2 + (1/5)0^2 + (1/5)1^2 + (1/5)2^2 + (1/5)3^2 + (1/5)4^2] \\ &= 88.89.\end{aligned}$$

Onda

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}[T^2] - \mathbb{E}[T]^2 \approx \boxed{44.44}.$$

15.1 Za $(X, Y) \sim \mathsf{Unif}(\{(0,0),(0,2),(1,2)\})$, naći korelaciju između X i Y.

Rešenje Treba nam $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[X^2]$ i $\mathbb{E}[Y^2]$ da rešimo ovaj problem.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= (1/3)[(0)(0) + (0)(2) + (1)(2)] = 2/3 \\ \mathbb{E}[X] &= (1/3)[(0) + (0) + (1)] = 1/3 \\ \mathbb{E}[Y] &= (1/3)[(0) + (2) + (2)] = 4/3 \\ \mathbb{E}[X^2] &= (1/3)[(0)^2 + (0)^2 + (1)^2] = 1/3 \\ \mathbb{E}[Y^2] &= (1/3)[(0)^2 + (2)^2 + (2)^2] = 8/3.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\operatorname{Cor}(X, Y) = \frac{(2/3) - (1/3)(4/3)}{\sqrt{(1/3) - (1/3)^2} \cdot \sqrt{(8/3) - (4/3)^2}} = 1/2 = \boxed{0.5000}.$$

15.3 Za (A, B) sa gustinom

$$f_{(A,B)}(a, b) = (2/3)(a + 2b)\mathbb{1}(a \in [0,1])\mathbb{1}(b \in [0,1]),$$

naći $\operatorname{Cor}(A, B)$.

Rešenje Da rešimo ovaj problem trebaju nam $\mathbb{E}[AB]$, $\mathbb{E}[A]$, $\mathbb{E}[B]$, $\mathbb{E}[A^2]$ i $\mathbb{E}[B^2]$. Srećom ovi integrandi su svi pozitivni i možemo iskoristiti Tonelija da uradimo račun sa dvostrukim integralima.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[AB] &= \int_{a=0}^{1}\int_{b=0}^{1} (ab)(2/3)(a+b)\, db\, da = 1/3 \\
\mathbb{E}[A] &= \int_{a=0}^{1}\int_{b=0}^{1} a(2/3)(a+b)\, db\, da = 5/9 \\
\mathbb{E}[B] &= \int_{a=0}^{1}\int_{b=0}^{1} b(2/3)(a+b)\, db\, da = 11/18 \\
\mathbb{E}[A^2] &= \int_{a=0}^{1}\int_{b=0}^{1} a^2(2/3)(a+b)\, db\, da = 7/18 \\
\mathbb{E}[B^2] &= \int_{a=0}^{1}\int_{b=0}^{1} b^2(2/3)(a+b)\, db\, da = 4/9.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\operatorname{Cor}(X,Y) = \frac{1/3 - (5/9)(11/18)}{\sqrt{(7/18)-(5/9)^2}\cdot\sqrt{(4/9)-(11/18)^2}} = \boxed{-0.08178\ldots}.$$

15.5 Razmotrimo slučajne promenljive X i Y sa zajedničkom gustinom

$$f_{(X,Y)}(x,y) = C\exp(-x-xy-y)\mathbb{1}(x \geq 0, y \geq 0).$$

a) Naći kovarijansu između X i Y numerički.

b) Naći korelaciju između X i Y numerički.

Rešenje Pre nego što nađemo očekivane vrednosti koje nam trebaju za a i b, prvo treba da nađemo C. Integrand je pozitivan, tako da po Tonelijevoj teoremi

$$C^{-1} = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} \exp(-x-xy-y)\, dy\, dx.$$

Ovaj integral nema rešenje sa elementarnim funkcijama nego sa ekponencijalnom integralnom funkcijom i kada se izračuna dobija se $-e\,\mathrm{Ei}(-1)$, tako da je

$$C \approx 1.67688.$$

Sada rešimo neophodne integrale numerički.

a) Integrali potrebni za ovaj zadatak su sledeći (rešeni u Wolfram Alfi)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} xy1.67688\exp(-x-xy-x)\, dx\, dy \approx 0.323126 \\
\mathbb{E}[X] &= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} x1.67688\exp(-x-xy-x)\, dx\, dy \approx 0.676877 \\
\mathbb{E}[Y] &= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} y1.67688\exp(-x-xy-x)\, dx\, dy \approx 0.676877.
\end{aligned}$$

Tako da

$$\operatorname{Cov}(X,Y) \approx 0.323126 - (0.676877)^2 \approx \boxed{-1.350}.$$

b) Za korelaciju nam treba još nekih činjenica

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} x^2 1.67688 \exp(-x - xy - x)\,dx\,dy = 1$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} y^2 1.67688 \exp(-x - xy - x)\,dx\,dy = 1.$$

Dakle, $\text{SD}(X) = \text{SD}(Y) = (1 - 0.676877^2)^{1/2}$, odakle imamo korelaciju

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{-1.35037}{1 - 0.676877^2} \approx \boxed{-0.2492}.$$

16.1 Neka su $A \sim \text{Unif}([0,1])$ i $B \sim \text{Unif}([0,2])$ nezavisne. Naći gustinu za $A + B$.

Rešenje Ovde je $f_A(a) = \mathbb{1}(a \in [0,1])$, i $f_B(b) = (1/2)\mathbb{1}(b \in [0,2])$. Dakle, konvolucija je

$$\begin{aligned} f_{A+B}(s) &= \int_a f_A(a) f_B(s-a)\,da \\ &= \int_a (1/2)\mathbb{1}(s - a \in [0,2], a \in [0,1])\,da \\ &= \int_a (1/2)\mathbb{1}(a \leq s, a \geq s - 2, a \in [0,1])\,da. \end{aligned}$$

Kada je $s \leq 0$ ili $s \geq 3$ indikator je uvek 0. Kada je $s \in [0,1]$,

$$\mathbb{1}(a \leq s, a \geq s-2, a \in [0,1]) = \mathbb{1}(a \in [0,s])$$

i integral je jednak $s/2$.

Kada je $s \in (1,3]$,

$$\mathbb{1}(a \leq s, a \geq s-2, a \in [0,1]) = \mathbb{1}(a \in [s-2,1])$$

i integral je jednak $[1 - (s-2)]/2 = (3-s)/2$. Dakle, konačna gustina je

$$f_{A+B}(s) = (s/2)\mathbb{1}(s \in [0,1]) + [(3-s)/2]\mathbb{1}(s \in (1,3]).$$

16.3 Pretpostavimo da su $X \sim \text{Unif}(\{1,2,3\})$ i $Y \sim \text{Unif}(\{3,5\})$ nezavisne. Koja je gustina od $X + Y$?

Rešenje Ovo će biti

$$\begin{aligned} [f * g](i) &= \sum_j f_X(j) f_Y(i-j) \\ &= \sum_{j \in \{1,2,3\}} (1/3)\mathbb{1}(j \in \{1,2,3\})(1/2)\mathbb{1}(i - j \in \{3,5\}) \\ &= (1/6)[\mathbb{1}(i - 1 \in \{3,5\})) + \mathbb{1}(i - 2 \in \{3,5\}) + \mathbb{1}(i - 3 \in \{3,5\})] \\ &= \boxed{(1/6)(\mathbb{1}(i=4) + \mathbb{1}(i=5) + 2\mathbb{1}(i=6) + \mathbb{1}(i=7) + \mathbb{1}(i=8))} \end{aligned}$$

16.5 Neka su R i G diskretne slučajne promenljive gde je $R \sim \text{Bern}(0.3)$ i $G \sim \text{Geo}(0.6)$. Tako je

$$f_R(i) = (0.3)\mathbb{1}(i = 1) + (0.7)\mathbb{1}(i = 0),\ f_G(i) = (0.6)(0.4)^{i-1}\mathbb{1}(i \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Naći gustinu za $R + G$.

Rešenje Znamo da $R+G$ ima gustinu koja je jednaka konvoluciji pojedinačnih gustina:

$$\begin{aligned}
f_{R+G}(i) &= [f_R * f_G](i) \\
&= \sum_a f_R(a) f_G(i - a) \\
&= \sum_{a \in \{0,1\}} [0.3\mathbb{1}(a = 1) + 0.7\mathbb{1}(a = 0)](0.6)(0.4)^{i-a-1}\mathbb{1}(i - a \in \{1, 2, \ldots\}) \\
&= f_{a=0}(i) + f_{a=1}(i),
\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
f_{a=0}(i) &= (0.3)(0.6)(0.4)^{i-2}\mathbb{1}(i \in \{2, 3, \ldots\}) \\
f_{a=1}(i) &= (0.7)(0.6)(0.4)^{i-1}\mathbb{1}(i \in \{1, 2, 3, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Primetimo $f_{a=0}(1) = 0$, and $f_{a=1}(1) = (0.7)(0.6) = 0.42$, tako

$$f_{R+G}(i) = 0.42\mathbb{1}(i = 1) + h(i)\mathbb{1}(i \in \{2, 3, \ldots\}),$$

gde za $i \in \{2, 3, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}
h(i) &= (0.3)(0.6)(0.4)^{i-2} + (0.7)(0.6)(0.4)^{i-1} \\
&= (0.3)(0.6)(0.4)^{i-2} + (0.7)(0.6)(0.4)(0.4)^{i-2} \\
&= 0.348(0.4)^{i-2}.
\end{aligned}$$

Sve ovo zajedno daje

$$\boxed{f_{R+G}(i) = 0.42\mathbb{1}(i = 1) + 0.348(0.4)^{i-2}\mathbb{1}(i \in \{2, 3, \ldots\}).}$$

17.1 Neka je $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 0.5$. Naći $\text{mgf}_X(t)$?

Rešenje Ovo je

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \boxed{(1/2)e + (1/2)e^2}.$$

17.3 Neka X ima funkciju generatrisu momenata datu sa

$$\text{mgf}_X(t) = 0.1\exp(10t) + 0.9\exp(-5t).$$

Naći gustinu za X.

Rešenje Ovde je $X \in \{-5, 10\}$ pošto imamo jedan $\exp(-5t)$ i jedan $\exp(10t)$ element. Koeficijenti onda daju verovatnoće za gustinu

$$\boxed{f_X(i) = 0.9\mathbb{1}(i = -5) + 0.1\mathbb{1}(i = 10).}$$

17.5 Neka su $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ iid $\mathsf{N}(0,1)$. Setimo se da za normalnu $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$, $\mathrm{mgf}_Z(t) = \exp(t^2/2)$.

a) Koja je funkcija generatrisa momenata za $Z_1 + Z_2$?
b) Koja je funkcija generatrisa momenata za
$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}?$$
c) Koja je funkcija generatrisa momenata za
$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}?$$

Rešenje

a) Iskoristite činjenicu
$$\mathrm{mgf}_{Z_1+Z_2}(t) = \mathrm{mgf}_{Z_1}(t)\,\mathrm{mgf}_{Z_2}(t) = \exp(t^2/2)\exp(t^2/2) = \boxed{\exp(t^2)}.$$
b) Razmotrimo funkciju generatrisu momenata skalirane slučajne promenljive:
$$\mathrm{mgf}_{\alpha X}(t) = \mathbb{E}[e^{t\alpha X}] = \mathrm{mgf}_X(\alpha t).$$
Za naš problem:
$$\mathrm{mgf}_{Z_1/n}(t) = \mathrm{mgf}_{Z_1}(t/n) = \exp((t/n)^2/2) = \exp(t^2/2n^2).$$
Sada dodajmo n njih zajedno:
$$\mathrm{mgf}_{(Z_1/n)+\cdots(Z_n/n)}(t) = \mathrm{mgf}_{Z_1/n}(t)^n = \mathrm{mgf}_{Z_1}(t/n)^n = [\exp(t^2/2n^2)]^n$$
$$= \boxed{\exp(t^2/2n)}.$$
c) Isto kao pod (b), ali skalirano za $1/\sqrt{n}$:
$$\mathrm{mgf}_{(Z_1/\sqrt{n})+\cdots(Z_n/\sqrt{n})}(t) = \mathrm{mgf}_{Z_1/\sqrt{n}}(t)^n = \mathrm{mgf}_{Z_1}(t/\sqrt{n})^n = \exp(t^2/2n)^n$$
$$= \boxed{\exp(t^2/2)}.$$
To znači kada saberete n normalnih slučajnih promenljivih sa očekivanjem 0 i standardnom devijacijom 1, i podelite sa $\sqrt{n}$, dobićete normalnu slučajnu promenljivu sa srednjom vrednošću 0 i standardnom devijacijom 1. Normalna slučajna promenljiva je *fiksna tačka* u odnosu na ovu operaciju.

CGT kaže da ako saberete bilo koje n slučajne promenljive sa očekivanjem 0 i standardom devijacijom 1, i podelite sa $\sqrt{n}$, dobijate približno normalnu slučajna promenljivu sa očekivanjem 0 i standardnom devijacijom 1. To je zato što takve operacije imaju tendenciju da konvergiraju ka fiksnoj tački, u ovom slučaju, normalnoj.

17.7 Neka X ima sledeću gustinu:
$$f_X(r) = \frac{3}{8}(r^3 - 8r^2 + 19r - 12)1(r \in [1,3]).$$

a) Naći modus(e) za X.
b) Naći median(e) za X.
c) Naći očekivanje od X.
d) Naći $\mathbb{E}[e^{tX}]$.

Rešenje Plot funkcije $f_X(r)$ je:

Imajte na umu da je grafik nagnut ulevo, što bi trebalo da čini srednju vrednost, modus, i medijanu malo ulevo od 2.

a) Da biste pronašli modus, maksimizirajte funkciju. Izvod od $f_X(r)$ u odnosu na r je $(9/8)r^2 - 6r + (57/8)$ što je kvadratna funkcija sa tačno jednom nulom u $[1, 3]$. Ova nula se javlja u $\boxed{1.785}$ i pošto je $f_X(r)$ nula za $r = 1$ i $r = 3$, i pozitivna za $r = 1.785$, ovo mora biti maksimum, pa je dakle modus.

b) Medijana će biti na mestu gde polovina površine ispod gustine leži levo od te tačke, a polovina desno. Postoji mnogo paketa koji takođe rade na integraciji i pronalaženju korena kao i većina kalkulatora. Za Wolfram Alpha, komanda:

```
1/2 = integrate (3/8)*(r^3-8*r^2+19*r-12) from 1 to a
```

daje $a \approx 0.42551$ i $a \approx 1.878$. Pošto medijana mora biti u intervalu $[1, 2]$, $\boxed{1.878}$ je rešenje.

c) Očekivanje je još lakše, jer uključuje samo jednu integraciju:

$$\int_1^3 r(3/8)(r^3 - 8r^2 + 19r - 1)\, dr.$$

što daje kao rešenje $\boxed{1.900}$.
Sumirajući ova prva tri dela:

(a)	modus	1.785
(b)	medijana	1.878
(c)	očekivanje	1.900

Oni su različiti jer gustina nije simetrična kao u slučaju normalne gustine.

d) Integral koji treba izračunati je

$$\int_1^3 e^{rt}(3/8)(r^3 - 8r^2 + 19r - 12)\, dt.$$

Volfram Alfa daje

$$\operatorname{mgf}_X(t) = \boxed{\frac{9 + 15t + 9e^t t^2 + e^{3t}(3t^2 + 3t - 9)}{4t^4}}.$$

Primetite da je proširenje ovog izraza u Tejlorov red:

$$1 + \frac{19}{10}t + \frac{19}{10}t^2 + \cdots,$$

i vrednost $19/10 = 1.9$ se poklapa sa očekivanjem koje smo ranije našli.

18.1 Za standardnu normalnu Z naći verovatnoću

$$\mathbb{P}(Z \in [-2, 2]).$$

Rešenje Ovo je

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp(-s^2/2)\, ds$$

što može biti izračunato aproksimativno koristeći WolframAlpha: $\boxed{0.9545}$

18.3 Konferencija Digital Life svake godine privlači broj polaznika koji ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 59 000 i standardnom devijacijom 10 000. Nezavisno od toga, E3 privlači broj polaznika koji je normalno raspodeljen sa očekivanjem 75 000 i standardnom devijacijom 5 000.

a) Pretpostavimo da uprosečimo dva broja. Kakva je raspodela tog proseka?

b) Kolika je šansa da je prosek dve konferencije veći od 70 000?

c) Kakva je raspodela broja onih koji pohađaju Digital Life minus broj onih koji pohađaju E3?

d) Koja je šansa da više ljudi pohađa Digital Life nego E3?

Rešenje

a) Neka je A broj učesnika na konferenciji Digital Life, a B broj učesnika na E3. Zatim, pošto su oni nezavisne normalne, njihov zbir i prosek i razlika će takođe biti normalni. Radi praktičnosti, sve predstavljamo u jedinicama od 1000. Onda

$$\frac{A+B}{2} \sim \mathsf{N}((59+75)/2, (10^2+5^2)/4) \sim \boxed{\mathsf{N}(67, 31.25)}.$$

b) Ako uvedemo $C \sim \mathsf{N}(67, 31.25)$, onda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \geq 70) &= \mathbb{P}(C - 67 \geq 3) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{C-67}{\sqrt{31.25}} \geq \frac{3}{\sqrt{31.25}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{3}{\sqrt{31.25}}\right) \\ &= \boxed{29.57\%}\end{aligned}$$

c) Za razliku, oduzmite očekivanja (ali ipak dodajte varijanse!)

$$A - B \sim \mathsf{N}(59 - 75, 10^2 + 5^2) \sim \boxed{\mathsf{N}(-16, 125).}$$

d) Za ovo je potrebno $A - B \geq 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A - B \geq 0) &= \mathbb{P}(A - B + 16 \geq 16) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{A-B+16}{\sqrt{125}} \geq \frac{16}{\sqrt{125}}\right) \\ &= \mathbb{P}(\left(Z \geq \frac{16}{\sqrt{125}}\right) \\ &= \boxed{7.620\%}\end{aligned}$$

18.5 Neka su $W_1, \dots, W_n$ iid standardne normalne slučajne promenljive. Koju raspodelu ima zbir $W_1 + \dots + W_n$?

Rešenje Bilo kakav zbir nezavisnih normalnih slučajnih promenljivih je opet jedna normalna slučajna promenljiva. Novo očekivanje je zbir n nula, a nova varijansa je zbir n jedinica, tako da

$$W_1 + \dots + W_n \sim \boxed{\mathsf{N}(0, n)}.$$

19.1 Neka su $D_1, \dots, D_8$ iid bacanja poštene šestostrane kockice. Aproksimirati verovatnoću da je $\sum D_i \geq 30$ koristeći CGT.

Rešenje Prvo ćemo izračunati očekivanje i varijansu:

$$\mathbb{E}[D_i] = (1+8)/2 = 4.5.$$
$$\mathbb{V}[D_i] = ((8-1+1)^2 - 1)/12 = 63/12.$$

Zatim standardizujemo sumu

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sum D_i \geq 17) &= \mathbb{P}\left(\sum \frac{D_i - 4.5}{\sqrt{(8)(63/12)}} \geq \frac{30-(4.5)(8)}{\sqrt{(8)(63/12)}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{30-(4.5)(8)}{\sqrt{(8)(63/12)}}\right) \\ &= \boxed{0.8227}\end{aligned}$$

19.3 Pretpostavimo da R ima gustinu

$$f_R(r) = 2r \cdot \mathbb{1}(r \in [0,1]).$$

a) Koje je očekivanje za R?

b) Koja je varijansa za R?

c) Neka si $R_1, R_2, \dots$ nezavisne sl. prom. sa istom raspodelom kao R. Koristeći CGT, aproksimirati

$$\mathbb{P}(R_1 + \dots + R_{100} \geq 70)?$$

d) Koje je očekivane za R dato da je $R \in [0.3, 0.5]$?

Rešenje

a) Ovo je

$$\mathbb{E}[R] = \int_r r \cdot 2r\mathbb{1}(r \in [0,1])\, dr = \int_{r=0}^{1} 2r^2\, dr = 2/3 = \boxed{0.6666\dots}.$$

b) Treba nam drugi momenat od R za ovo:

$$\mathbb{E}[R^2] = \int_r r^2 \cdot 2r\mathbb{1}(r \in [0,1])\, dr = \int_{r=0}^{1} 2r^3\, dr = 1/2.$$

Dakle, varijansa je

$$\mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}[R]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

c) CGT kaže da je $p = \mathbb{P}(R_1 + \cdots + R_{100} \geq 70)$ jednako

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}\left(\frac{R_1 + \cdots + R_{100} - 100(2/3)}{\sqrt{1/18}\sqrt{100}} = \frac{70 - 100(2/3)}{\sqrt{100 \cdot 1/18}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}(Z \geq \sqrt{2})) \\ &= \boxed{0.07864\ldots} \end{aligned}$$

d) Dato da leži u $[0.3, 0.5]$, gustina postaje nenormalizovana.

$$f_{R|R\in[0.3,0.5]}(r) \propto f_R(r)\mathbb{1}(r \in [0.3, 0.5]).$$

Normalizacija daje

$$f_{R|R\in[0.3,0.5]}(r) = \frac{f_R(r)\mathbb{1}(r \in [0.3, 0.5])}{\int_{s\in[0.3,0.5]} f_R(s)\, ds} = \frac{2r}{0.16}\mathbb{1}(r \in [0.3, 0.5]).$$

Odavde imamo da je uslovno očekivanje

$$\mathbb{E}[R|R \in [0.3, 0.5]] = \int_r r \cdot \frac{2r}{0.16}\mathbb{1}(r \in [0.3, 0.5]) = \boxed{0.4083\ldots}.$$

19.5 Neka su $U_1, U_2, \ldots, U_{12}$ standardne uniformne slučajne promenljive (znači uniformne nad $[0, 1]$). Koristeći CGT aproksimirati

$$\mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_{12} < 7).$$

Rešenje Očekivanje standardne uniformne je

$$\mathbb{E}[U] = \int x\mathbb{1}(x \in [0, 1])\, dx = \int_0^1 x\, dx = 1/2,$$

a drugi momenat

$$\mathbb{E}[U^2] = \int x^2\mathbb{1}(x \in [0, 1])\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = 1/3.$$

Odavde dobijamo da je varijansa jednaka $1/3 - (1/2)^2 = 1/12$. Onda je varijansa zbira jednaka $12 \cdot (1/12) = 1$ a očekivanje je $12 \cdot (1/2) = 6$. Dakle

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_{12} < 7) &= \mathbb{P}(\frac{U_1 + \cdots + U_{12} - 6}{\sqrt{1}} < \frac{7 - 6}{\sqrt{1}}) \\ &\approx \mathbb{P}(Z < 1) \\ &= \boxed{0.8413\ldots} \end{aligned}$$

20.1 Neka je $X \sim \text{Bin}(34, 0.23)$. Koliko je $\mathbb{E}[X]$?

Rešenje Očekivanje binomne slučajne promenljive je jednako proizvodu njenih parametara tako da je $(34)(0.23) = \boxed{7.820}$.

20.3 Neka je $G \sim \text{Geo}(0.38)$.

a) Koliko je $\mathbb{E}[G]$?

b) Kolika je $\mathbb{V}[G]$?

Rešenje

a) Očekivanje je jednako $1/0.38 \approx \boxed{2.631}$.

b) Varijansa je $(1 - 0.38)/0.38^2 \approx \boxed{4.293}$.

20.5 Neka je $N \sim \text{NegBin}(20, 0.38)$.

a) Koliko je $\mathbb{E}[N]$?

b) Kolika je $\mathbb{V}[N]$?

Rešenje

a) Očekivanje je $20/0.38 \approx \boxed{52.63}$

b) Varijansa je $20(1 - 0.38)/0.38^2 \approx \boxed{85.87}$

20.7 Neka su $X \sim \text{Bin}(13, 0.2)$ i $Y \sim \text{Bin}(27, 0.2)$ nezavisne. Koja je raspodela od $X + Y$?

Rešenje X predstavlja broj uspeha u 13 nezavisnih pokušaja (gde uspeh ima verovatnoću 0.2). Y predstavlja broj uspeha u 27 nezavisnih pokušaja (gde uspeh ima verovatnoću 0.2). Zajedno $X + Y$ predstavlja broj uspeha u 40 nezavisnih pokušaja. Dakle, $X + Y \sim \text{Bin}(40, 0.2)$.

20.9 Neka je Y slučajna promenljiva sa vrednostima u pozitivnim celim brojevima i sa $\mathbb{E}[Y] = 4.2$, i $[X|Y] = \text{Bin}(Y, 0.3)$. Koliko je onda $\mathbb{E}[X]$?

Rešenje Pošto je $\mathbb{E}[X|Y] = (Y)(0.3)$,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[0.3Y] = 0.3(4.2) = \boxed{1.260}.$$

20.11 Naći $\mathbb{E}[G^2]$ za geometrijsku sl. prom. uslovljavajući vrednošću B_1 i onda uzimajući očekivanje ponovo.

Rešenje Prema osnovnoj teoremi verovatnoće

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[G^2|B_1]] \\
&= p(1)^2 + (1-p)\mathbb{E}[(1+G)^2] \\
&= p + (1-p)\mathbb{E}[1 + 2G + G^2] \\
&= p + (1-p)(1 + 2/p) + (1-p)\mathbb{E}[G^2].
\end{aligned}$$

Premeštanje $(1-p)\mathbb{E}[G^2]$ na drugu stranu i deljenje sa p daje

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G^2] &= 1 + \frac{1-p}{p}\left(1 + \frac{2}{p}\right) \\
&= \boxed{\frac{2-p}{p^2}}.
\end{aligned}$$

21.1 Neka je P Puasonov tačkasti proces intenziteta 2, na intervalu $[0, \infty)$. Koja je raspodela $\inf(P)$?

Rešenje Infimum skupa tačaka je ona najbliža 0. Dakle, ovo je rastojanje od 0 do prve tačke, što ima $\boxed{\mathsf{Exp}(2)}$ za ovaj tip procesa.

21.3 Nek aje P Puasonov tačkasti proces na $[0, \infty)$ intenziteta 1.8, i $P_1 = \inf(P)$. Kolika je verovatnoća $\mathbb{P}(P_1 \leq 1)$?

Rešenje Pošto je $P_1 \sim \mathsf{Exp}(1.8)$, to je

$$\int_0^1 1.8 \exp(-1.8s)\mathbb{1}(s \geq 0)\, ds = -\exp(-1.8s)|_0^1 = 1 - \exp(-1.8) \approx \boxed{0.8347}.$$

21.5 Vremena dolazaka autobusa tokom jednog sata ($[0, 1]$) formiraju Puasonov proces intenziteta 1.4/hr.

a) Kolika je šansa da tačno jedan autobus stigne u sat vremena?

b) Koliki je očekivani broj autobusa koji stižu u sat vremena?

c) Koliki je očekivani broj autobusa koji stižu u prvih pola sata?

Rešenje

a) Broj autobusa biće Puason sa parametrom 1.4, odakle je šansa za tačno jedan autobus

$$\mathbb{P}(N = 1) = \exp(-1.4)(1.4)^1/1! \approx \boxed{0.3452}.$$

b) Očekivani broj u sat vremena je $1(1.4) = \boxed{1.400}$.

c) Očekivani broj u prvih pola sata je $(1/2)(1/4) = \boxed{0.7000}$.

21.7 Za Puasonov tačkasti proces na $[0, \infty)$ intenziteta λ, neka je $N_A = \#(P \cap A)$. Naći $\text{Cov}(N_{[0,2)}, N_{[0,3)})$.

Rešenje Primetite da je

$$N_{[0,3)} = N_{[0,2)} + N_{[2,3)},$$

i dakle

$$\begin{aligned}\text{Cov}(N_{[0,2)}, N_{[0,3)}) &= \text{Cov}(N_{[0,2)}, N_{[0,2)}) + \text{Cov}(N_{[0,2)}, N_{[2,3)}) \\ &= \mathbb{V}(N_{[0,2)}) + 0 = \boxed{2\lambda}.\end{aligned}$$

22.1 Neka su N_1 and N_2 nezavisne Puasonove slučajne promenljive sa očekivanjima 2 i 3 respektivno. Kolika je šansa da je $N_1 + N_2 = 5$?

Rešenje Njihov zbir će imati Puasonovu raspodelu sa očekivanjem 5. Dakle

$$\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 5) = \exp(-5)\frac{5^5}{5!} = \boxed{0.1754\ldots}.$$

22.3 EPA lokacije za čišćenje u okrugu su modelovane kao PPP sa stopom $\lambda = 3/\text{mi}^2$.

a) Ako region ima površinu od 9 kvadratnih milja, koliki je očekivani broj mesta za čišćenje?

b) Ako se zna da region ima najmanje 25 lokacija za čišćenje, kolika je šansa da ima najmanje 30 takvih lokacija? (Verovatno želite da koristite računar da ovo izračunate.)

Rešenje

a) Prosečan broj mesta za čišćenje biće stopa puta površina, to jest

$$\frac{3}{\text{mi}^2} \cdot 9\text{mi}^2 = \boxed{27}.$$

b) Ovo je $\mathbb{P}(N \geq 30 | N \geq 25)$, gde $N \sim \mathsf{Pois}(27)$. Koristeći formulu uslovne verovatnoće imamo

$$\frac{\mathbb{P}(N \geq 30, N \geq 25)}{\mathbb{P}(N \geq 25)} = \frac{\mathbb{P}(N \geq 30)}{\mathbb{P}(N \geq 25)} = \boxed{0.4535\ldots},$$

gde je poslednji izraz izračunat u R koristeći

```
(1-ppois(29,27))/(1-ppois(24,27))
```

22.5 Pretpostavimo $P \sim \mathsf{Pois}([0,2], \lambda \cdot \ell)$, gde je $\lambda > 0$ konstanta i ℓ Lebegova mera. Ako je $N_{[0,2]} = 10$, koja je šansa da je $N_{[0,1]} = 4$?

Rešenje Znamo da je

$$\frac{\mu([0,1]}{\mu[0,2]} = \frac{\lambda(1-0)}{\lambda(2-0)} = \frac{1}{2}.$$

Tako da

$$[N_{[0,1]} | N_{[0,2]} = 10] \sim \mathsf{Bin}(10, 1/2),$$

i

$$\mathbb{P}(N_{[0,1]} | N_{[0,2]} = 10) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \boxed{0.2050\ldots}.$$

22.7 Izbijanje bolesti je modelovano kao Puasonov tačkasti proces intenziteta 2.3 po kvadratnoj milji.

a) Ako je grad površine 3 kvadratne milje, kolika je šansa da ima tačno 6 žarišta bolesti?

b) Pretpostavimo da je deo grada zapadno od reke 1.2 kvadratne milje (ostavljajući 1.8 kvadratnih milja istočno od reke). Ako postoji tačno 8 žarišta širom grada, kolika je šansa da ih je najmanje 3 na zapadnoj strani reke?

Rešenje

a) Broj tačaka u procesu će biti Puasonov sa parametrom $3 \cdot 2.3 = 6.9$. Dakle

$$\mathbb{P}(N = 6) = \exp(-6.9)6.9^6/6! \approx \boxed{0.1510\ldots}.$$

b) Ako je X broj na zapadnoj strani i N ukupan broj

$$[X | N = 8] \sim \mathsf{Bin}(8, 1.2/(1.2 + 1.8)).$$

Neka je $p = 1.2/(1.2 + 1.8) = 0.4$.

$$\mathbb{P}(X \geq 3|N = 8) = 1 - \mathbb{P}(X \in \{0, 1, 2\}|N = 8)$$
$$= 1 - \binom{8}{0}(0.6)^8 + \binom{8}{1}(0.4)^1(0.6)^7 + \binom{8}{2}(0.4)^2(0.6)^6 = \boxed{0.6846\ldots}.$$

23.1 Neka (X_1, X_2, X_3) ima zajedničku gustinu

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)} \propto (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)\mathbb{1}((x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3).$$

a) Naći normalizovanu gustinu.

b) Naći marginalnu gustinu od X_1.

c) Naći očekivanje od X_1.

Rešenje

a) Prvo

$$\int_{x_1\in[0,1]} \int_{x_2\in[0,1]} \int_{x_3\in[0,1} (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)\, dx_3\, dx_2\, dx_1$$

ima vrednost $5/4$, tako da je normalizovana gustina

$$\boxed{\frac{4}{5}(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)\mathbb{1}(x_1, x_2, x_3 \in [0, 1])}.$$

b) Da dobijemo marginalnu gustinu moramo da integrali preko promenljivih x_2 i x_3 što daje:

$$\int_{x_2\in[0,1]} \int_{x_3\in[0,1} (4/5)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)\mathbb{1}(x_1 \in [0, 1])\, dx_3\, dx_2,$$

i izračunava se

$$\boxed{f_{X_1}(x_1) = \frac{2}{15}(6x_1^2 + 7x_1 + 2)\mathbb{1}(x_1 \in [0, 1])}$$

c) Možemo ili da se vratimo na početak i integrišemo sa gustinom pomnoženom sa x_1, tako da samo marginalnu gustinu puta x_1 da dobijemo ?

$$\int_{x_1=0}^{1} x_1 \frac{2}{15}(6x_1^2 + 7x_1 + 2)\, dx_1 = \frac{29}{45} = \boxed{0.6444\ldots}$$

23.3 Neka $X_1, \ldots, X_n$ imaju zajedničku gustinu

$$(1/10)^n \mathbb{1}((x_1, \ldots, x_n) \in [0, 10]^n).$$

Pokazati da su X_i nezavisne.

Rešenje Pošto je

$$(1/10)^n \mathbb{1}((x_1, \ldots, x_n) \in [0, 10]^n) = \prod_{i=1}^{n} (1/10)\mathbb{1}(x_i \in [0, 10]),$$

zajednička gustina je proizvod n marginalnih gustina (od kojih je svaka uniformna gustina na $[0, 10]$), i slučajne promenljive su nezavisne.

23.5 Neka X i Y imaju zajedničku gustinu

$$f_{(X,Y)}(x,y) = (3/4)xy^2\mathbb{1}(x \in [0,1])\mathbb{1}(y \in [0,2]).$$

Pokazati da su X i Y nezavisne.

Rešenje Primetite da gustina može da se rastavi na činioce od kojih jedan zavisi samo od x a drugi samo od y:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = [C_x x\mathbb{1}(x \in [0,1])][C_y y^2\mathbb{1}(y \in [0,2])].$$

Dakle X i Y su nezavisne.

24.1 Neka je $A \sim \mathsf{Unif}\{1,2,3,4,5,6\}$ i $[B|A] \sim \mathsf{Exp}(A)$. Dato da je $B = 3.6$, koja je raspodela od A?

Rešenje Prvo nađimo posteriornu gustinu za A ako je dato $B = b$, gde je $b \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_{A|B=b}(a) &\propto f_A(a) f_{B|A=a}(b) \\ &= (1/6)\mathbb{1}(a \in \{1,\ldots,6\})a\exp(-ab). \\ &\propto a\exp(-ab)\mathbb{1}(a \in \{1,\ldots,6\}). \end{aligned}$$

Normalizujuća konstanta je

$$C = \sum_{a=1}^{6} a\exp(-ab) = \exp(-b) - 2\exp(-2b) - \cdots - 6\exp(-6b).$$

Za $b = 3.6$, ovo je $C = 0.028804\ldots$. Dakle

$$\boxed{f_{A|B=3.6}(a) = 34.62a\exp(-3.6a)\mathbb{1}(a \in \{1,\ldots,6\})}.$$

24.3 Pretpostavimo da $X_1 \sim \mathsf{Unif}([0,10])$ i $X_2 \sim \mathsf{Unif}([0,20])$. Neka je $B \sim \mathsf{Unif}\{1,2\}$.

a) Dato da je $X_B = 15$, koja je verovatnoća da je $B = 2$?

b) Dato da je $X_B = 7$, koja je verovatnoća da je $B = 2$?

Rešenje

a) Pošto je $\mathbb{P}(X_1 > 10) = 0$, dato da je $X_B = 15$, verovatnoća da je $B = 2$ je jednaka $\boxed{1}$.

b) Dato da je $X_B = 7$, moguće je da B bude ili 1 ili 2. Idemo na Bajesovo pravilo! Želimo da nađemo gustinu za B ako je data vrednost od X_B. Za to moramo da nađemo priornu gustinu za B i uslovnu gustinu za $X_B|B$. One su

$$\begin{aligned} f_B(b) &= \frac{1}{2}\mathbb{1}(b \in \{1,2\}) \\ f_{X_B|B=1}(x) &= (1/10)\mathbb{1}(x \in [0,10]) \\ f_{X_B|B=2}(x) &= (1/20)\mathbb{1}(x \in [0,20]). \end{aligned}$$

Možemo ovo da napišemo i kao

$$f_{X_B|B=b}(x) = 1/(a(b))\mathbb{1}(x \in [0, a(b)]),$$

gde je $a(1) = 10$ i $a(2) = 20$. Onda Bajesovo pravilo kaže

$$\begin{aligned} f_{B|X_B=7}(b) &\propto \frac{1}{a(b)}\mathbb{1}(x \in [0, a(b)])\frac{1}{2}\mathbb{1}(b \in \{1, 2\}) \\ &\propto \frac{1}{a(b)}\mathbb{1}(b \in \{1, 2\}). \end{aligned}$$

Zatim da bismo pronašli konstantu proporcionalnosti, samo integralimo desnu stranu u odnosu na meru prebrojavanja, što nam daje zbir

$$C = \frac{1}{10} + \frac{1}{20}.$$

Otuda

$$f_{B|X_b=7}(b) = \frac{1}{a(b)}\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right]^{-1},$$

i

$$\mathbb{P}(B = 2|X_b = 7) = f_{B|X_b=7}(2) = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right] = \frac{1}{3} = \boxed{0.3333\ldots}.$$

24.5 Kompanija za lekove veruje da je novi tretman efikasan kod pacijenata sa verovatnoćom p, gde je p uniformno na intervalu $[0, 1]$. Ispitivanje leka nastavlja se na pacijentima sve dok se ne pronađu četiri pacijenta kod kojih je lek efikasan. Studija je morala da uključi $N = 21$ pacijenata pre nego što su otkrili četiri na kojima je lek delovao.

S obzirom na ove informacije, koja je nova raspodela od p?

Rešenje Posteriorna gustina je proporcionalna priornoj gustini p puta verodostojnost. Ovde $N|p = s$ ima negativnu binomnu raspodelu sa parametrima 4 i s. Dakle

$$\begin{aligned} f_p(s) &= \mathbb{1}(s \in [0, 1]) \\ f_{N|p=s}(i) &= \binom{i-1}{3} s^4(1-s)^{i-4}\mathbb{1}(i \in \{4, 5, \ldots\}) \end{aligned}$$

tako da je posteriorna gustina

$$f_{p|N=21}(s) \propto \binom{21}{3} s^4(1-s)^{17}\mathbb{1}(s \in [0, 1]).$$

Ovo je distribucija beta slučajne promenljive sa parametrima 5 i 18. Stoga

$$\boxed{[p|N = 21] \sim \text{Beta}(5, 18)}.$$

25.1 Neka je X slučajna promenljiva sa očekivanjem 0.4, srednjom apsolutnom devijacijom 1.5, i standardnom devijacijom 2.

a) Oceniti odozgo $\mathbb{P}(|X - 0.4| > 4)$ koristeći nejednakost Markova.

b) Oceniti odozgo $\mathbb{P}(|X - 0.4| > 4)$ koristeći nejednakost Čebiševa.

c) Koja ocena je bolja? (To jest, ako vam se traži da date gornju ocenu za $\mathbb{P}(|X-0.4| > 4)$, šta biste rekli?)

Rešenje

a) Po nejednakosti Markova

$$\mathbb{P}(|X - 0.4| > 4) \leq \frac{\mathbb{E}[|X - 0.4|]}{4} = \frac{1.5}{4} = \boxed{0.3750}.$$

b) Prema nejednakosti Čebiševa

$$\mathbb{P}(|X - 0.4| > 4) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{4^2} = \frac{2^2}{4^2} = \boxed{0.2500}.$$

c) $\boxed{0.2500}$ je bolja gornja granica jer je manji od dva broja.

25.3 Građevinski projekat će trajati neko nepoznato vreme. Graditelji veruju da će srednja vrednost biti pedeset dana sa standardnom devijacijom od deset dana.

a) Dajte gornju granicu za šansu da projekat traje najmanje šezdeset dana.

b) Dajte gornju granicu za šansu da projekat traje najmanje sto dana.

Rešenje Neka je T vreme potrebno za projekat izgradnje. Tada je T nenegativno a standardna devijacija je konačna, pa se ovde primenjuju i Markov i Čebišev.

a)

$$\mathbb{P}(T \geq 60) \leq 50/60 \text{ prema Markovu}$$
$$\mathbb{P}(T \geq 60) \leq 1/1^2 \text{ prema Čebiševu}$$

Dakle $\boxed{0.8333}$ je bolja gornja granica.

b)

$$\mathbb{P}(T \geq 100) \leq 50/100 \text{ prema Markovu}$$
$$\mathbb{P}(T \geq 100) \leq 1/5^2 \text{ prema Čebiševu}$$

Dakle $\boxed{0.04000}$ je bolja gornja granica.

25.5 Outreach Solutions svakodnevno opslužuje broj klijenata uniformno na $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Neka je N ukupan broj klijenata opsluživan tokom sedam dana.

a) Koje je očekivanje od N?

b) Koja je standardna devijacija od N?

c) Koristeći činjenicu da je N simetrično u odnosu na svoje očekivanje, dajte donju granicu za verovatnoću da je $N \leq 26$.

Rešenje

a) Neka je N_i broj klijenata uslužen na dan i. Tada je

$$N = N_1 + \cdots + N_7.$$

Dakle

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] &= \mathbb{E}[N_1 + \cdots + N_7] = \mathbb{E}[N_1] + \cdots + \mathbb{E}[N_7] = 7\mathbb{E}[N_1] \\ &= 7(1+5)/2 = \boxed{21 \text{ klijenata}}.\end{aligned}$$

b) Slično, pošto se može uzeti da su N_i iid:

$$\mathbb{V}[N] = \mathbb{V}[N_1 + \cdots + N_7] = \mathbb{V}[N_1] + \cdots + \mathbb{V}[N_7] = 7\mathbb{V}[N_1] = 7(5^2 - 1)/12 = 14.$$

Dakle $\mathrm{SD}(N) = \sqrt{14} \approx \boxed{3.741}$.

c) Treba da nađemo α takvo da je $\mathbb{P}(N \leq 26) \geq \alpha$. Ali imamo samo gornje granice? Zato primenimo funkciju $1 - x$ na obe strane:

$$1 - \alpha \leq 1 - \mathbb{P}(N \leq 26) = \mathbb{P}(N \geq 27).$$

Markovljeva nejednakost nam daje

$$\mathbb{P}(N \geq 27) \leq \mathbb{E}[N]/27 = (7)(3)/27 = 21/27.$$

Čebiševljeva nejednakost (i simetrija) nam daju:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N \geq 27) &= \mathbb{P}(N - 21 \geq 6) \\ &= (1/2)\mathbb{P}(|N - 21| \geq 6) \\ &\leq (1/2)\mathbb{V}(N)/6^2 = 7\mathbb{V}(N_1)/72.\end{aligned}$$

Pošto je $N_1 \sim \mathsf{Unif}(\{1,2,3,4,5\})$, imamo $\mathbb{V}(N_1) = (5^2 - 1)/12 = 2$. Dakle $1 - \alpha = 7/36$, što znači da je $\alpha = 29/36 > \boxed{0.8055}$.

25.7 Pretpostavimo da X ima konačno očekivanje μ i standardnu devijaciju σ. Sve slučajne promenljive imaju bar jednu medijanu. Pokazati da mora postojati bar jedna medijana za X negde (striktno) između $\mu - \sqrt{3}\sigma$ i $\mu + \sqrt{3}\sigma$.

Rešenje

Dokaz. Pošto X ima konačno očekivanje i varijansu, može se primeniti nejednakost Čebiševa i

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \sqrt{3}\sigma) \leq \frac{1}{3}.$$

Konkretno, neka je $m \geq \mu + \sqrt{3}\sigma$. Onda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > m) &\leq \mathbb{P}(X \geq \mu + \sqrt{3}\sigma) \\ &= \mathbb{P}(X - \mu \geq \sqrt{3}\sigma) \\ &\leq \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \sqrt{3}\sigma) \\ &\leq 1/3 \text{ (nejednakost Čebiševa)}.\end{aligned}$$

Tako da ako je $m \geq \mu + \sqrt{3}\sigma$, onda m nije medijana.

Sada pretpostavimo da je $m \leq \mu - \sqrt{3}\sigma$. Onda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq m) &\leq \mathbb{P}(X \leq \mu - \sqrt{3}\sigma)\\ &= \mathbb{P}(X - \mu \leq -\sqrt{3}\sigma)\\ &\leq \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \sqrt{3}\sigma)\\ &\leq 1/3 \text{ (nejednakost Čebiševa).}\end{aligned}$$

I opet m ne može biti medijana!

Ako nema nijedne medijane u intervalu $(-\infty, \mu - \sqrt{3}\sigma]$, ni u $[\mu + \sqrt{3}\sigma, \infty)$, onda mora biti jedne u intervalu $(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$, čime je dokaz završen. □

25.9 Vreme izgradnje projekta T ima sledeću srednju vrednost, standardnu devijaciju, srednju apsolutnu devijaciju i funkciju generatrisu momenata na 0.5:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= 100\\ \sqrt{\mathbb{E}[(T - \mathbb{E}[T])^2]} &= 15\\ \mathbb{E}(|T - \mathbb{E}[T]|) &= 12\\ \mathbb{E}(\exp(0.5T)) &= \exp(63).\end{aligned}$$

Koristeći ove činjenice zajedno sa Markovim i Čebiševom, postavite što bolju gornju granicu za $\mathbb{P}(T > 130)$. Obavezno pokažite ceo postupak!

Rešenje Primetimo da je $T \geq 0$ er je merenje vremena. Markovljeva nejednakost daje

$$\mathbb{P}(T > 130) \leq \mathbb{E}[T]/130 = 100/130 = 0.7692\ldots.$$

Nije baš sjajno! Poznavanje standardne devijacije nam omogućava da koristimo Čebiševa:

$$\mathbb{P}(T > 130) = \mathbb{P}(T - 100 > 30) \leq \mathbb{P}(|T - 100| > 30) \leq \frac{15^2}{30^2} = \frac{1}{2^2} = 0.25.$$

Sledeće je srednje apsolutno odstupanje, za koje nam Markov kaže da daje

$$\mathbb{P}(T > 130) = \mathbb{P}(T - 100 > 30) \leq \mathbb{P}(|T - 100| > 30) \leq \frac{\mathbb{E}[|T - 100|]}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Konačno,

$$\mathbb{P}(T > 130) = \mathbb{P}(\exp(0.5T) > \exp(0.5 \cdot 130)) \leq \frac{\exp(63)}{\exp(65)} = \exp(-2) = 0.1353\ldots.$$

Znači najbolja gornja granica je $\boxed{0.1353}$.

26.1 Pretpostavimo X ima generatrisu momemata $\mathrm{mgf}_X(t) = [(\exp(t) - 1)/t]^{10}$. Oceniti $\mathbb{P}(X \geq 8)$ sa Černofom, koristeći $t = 5$.

Rešenje Černof kaže da je

$$\mathbb{P}(X \geq 8) \leq \mathrm{mgf}_X(t)\exp(-8t)$$

za sve $t > 0$. Konkretno, za funkciju generatrisu momenata u ovom zadatku i datu vrednost t,

$$\mathbb{P}(X \geq 8) \leq [(e^5 - 1)/5]^{10} \exp(-8 \cdot 5) \approx \boxed{0.002108\ldots}$$

26.3 Iskoristite Černofovu nejednakost da date što bolju moguću gornju granicu za verovatnoću da je zbir od 12 iid slučajnih promenljivih uniformnih nad $[0, 1]$ veći ili jednak broju 9.

Rešenje Uniformna nad $[0, 1]$ ima generatrisu momenata za $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(tU)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tu)\mathbb{1}(u \in [0,1])\, du \\
&= \int_0^1 \exp(tu)\, du \\
&= \left.\frac{\exp(tu)}{t}\right|_0^1 \\
&= \frac{\exp(t) - 1}{t}.
\end{aligned}$$

Znači zbir 12 iid uniformnih nad $[0, 1]$ ima generatrisu momenata $[(e^t - 1)/t]^{12}$.

Stavimo to u Černofovu granicu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_{12} \geq 9) &\leq \mathrm{mgf}_{U_1+\cdots+U_{12}}(t) \exp(-9t) \\
&= \left[\frac{e^t - 1}{t}\right]^{10} \exp(-0.75t)^{12} \\
&= \left[\frac{e^{0.25t} - e^{-0.75t}}{t}\right]^{12}
\end{aligned}$$

Numeričko minimiziranje pojma unutar zagrada daje $0.664554\ldots$, što daje najbolju gornju granicu $\boxed{0.007419\ldots}$.

27.1 Za $X \sim$ Cauchy, naći

$$\mathbb{P}(X \in [0, 5]).$$

Rešenje Gustina Košijeve je $(2/\tau)(1 + s^2)^{-1}$, tako da je ovo jednako

$$\int_0^5 \frac{2}{\tau} \cdot 11 + s^2\, ds = \frac{2}{\tau}[\arctan(5) - \arctan(0)] \approx \boxed{0.4371}.$$

27.3 Oceniti $\zeta(2.5)$ na četiri značajne cifre.

Rešenje Primetimo

$$\zeta(2.5) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{2.5}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{2.5}}.$$

Ključ je u nalaženju koliko veliko treba da bude n da bi naš rezultat bio tačan na 4 značajne cifre.

Možemo oceniti zbir odozgo koristeći integral.

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{2.5}} &= \int_{x=n+1}^{\infty} \lfloor x \rfloor^{-2.5}\,dx \\ &\leq \int_{x=n+1}^{\infty} (x-1)^{-2.5}\,dx \\ &= (2/3)n^{-1.5}.\end{aligned}$$

Uzimajući $n = 1645$, dobijamo da je ova suma najviše 0.00001, i tako

$$\zeta(2.5) \in \left[\sum_{i=1}^{1645} \frac{1}{i^{2.5}}, \sum_{i=1}^{1645} \frac{1}{i^{2.5}} + 0.00001\right] = [1.34147, 1.34179],$$

pa na 4 značajne cifre, $\zeta(2.5) \approx \boxed{1.341}$.

27.5 Za $X \sim \text{Zeta}(\alpha)$ sa $\alpha > 1$, dokazati da $\ln(X)$ uvek ima konačno očekivanje.

Rešenje Očekivanje za $\ln(X)$ je suma

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln(X)] &= \sum_{i=1}^{\infty} \ln(i) \frac{1}{i^{\alpha}} \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \ln(i)/i^{\alpha}\end{aligned}$$

pošto je $\ln(1) = 0$.

Primetimo da je za $x \in [1, 2)$, $\ln(1 + x) \geq \ln(2)$ i $1/x^{\alpha} \geq 1/2^{\alpha}$. Isto tako, za $x \in [2, 3)$, $\ln(1 + x) \geq \ln(3)$ i $1/x^{\alpha} \geq 1/3^{\alpha}$. Primena ove ideje za sve intervale širine 1 daje

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln(X)] &= \zeta(\alpha)^{-1} \sum_{i=2}^{\infty} \ln(i)/i^{\alpha} \\ &\leq \zeta(\alpha)^{-1} \int_{1}^{\infty} \ln(1+x)/x^{\alpha}\,dx.\end{aligned}$$

Ovaj integral nije lako rešiti. Pomaže da primetimo da za $x \geq 1$ važi,

$$\ln(1+x) - \ln(x) = \ln(1+1/x) \leq 1 + 1/x,$$

što znači da je

$$\ln(1+x) \leq \ln(x) + 2$$

za $x \geq 1$. Dakle

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln(X)] &= \zeta(\alpha)^{-1} \sum_{i=2}^{\infty} \ln(i)/i^{\alpha} \\ &\leq \zeta(\alpha)^{-1} \int_{1}^{\infty} [2 + \ln(x)]/x^{\alpha}\,dx \\ &\leq 2 + \zeta(\alpha)^{-1} \int_{1}^{\infty} \ln(x)/x^{\alpha}\,dx.\end{aligned}$$

Sada možemo da iskoristimo parcijalnu integraciju

$$f(x) = \ln(x),\ g'(x) = x^{-\alpha},\ f'(x) = 1/x,\ g(x) = -x^{-\alpha+1}/(\alpha-1),$$

tako da je

$$\int_1^\infty \ln(x)/x^\alpha\,dx = -\ln(x)x^{-\alpha+1}/(\alpha-1)|_1^\infty + \int_1^\infty 1/x^\alpha\,dx = \zeta(\alpha).$$

Dakle

$$\mathbb{E}[\ln(X)] \le 2 + 1/(\alpha-1).$$

što je konačno za svako $\alpha > 1$!

28.1 Mala plastična kantica sadrži pločice sa slovima MISSISSIPI. Četiri od ovih pločica su izvučene iz kantice bez vraćanja.

a) Kolika je šansa da su sve četiri S pločice izvučene?

b) Kolika je šansa da su tačno dve od četiri izvučene pločice sa slovom S?

Rešenje

a) Neka je A_i događaj da je i-ta pločica sa slovom S. Želimo $\mathbb{P}(A_1A_2A_3A_4)$. Primetimo da je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1A_2A_3A_4) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\mathbb{P}(A_4|A_1A_2A_3)\\ &= \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\\ &\approx \boxed{0.003030}.\end{aligned}$$

28.3 Svakog dana fabrika proizvede 500 šrafova od kojih su 10 lošeg kvaliteta.

a) Ako se od 500 šrafova izvlači 5 njih na slučajan način, koja je verovatnoća da u tom uzorku nema nijednog lošeg kvaliteta?

b) Koji je očekivani broj šrafova lošeg kvaliteta u ovom uzorku veličine 5?

Rešenje

a) Ovo će biti

$$\frac{490}{500}\cdot\frac{489}{499}\cdot\frac{488}{498}\cdot\frac{487}{497}\cdot\frac{486}{496} = \boxed{0.9035\ldots}.$$

b) Ovo će biti $(10/500)(5) = \boxed{0.1000}$. Primetimo da nejednakost Markova za broj loših šrafova Y daje

$$\mathbb{P}(Y \ge 1) \le \mathbb{E}[Y]/1 = 0.1,$$

tako da je $\mathbb{P}(Y = 0) \ge 1 - 0.1 = 0.9$ što je dobra aproksimacija tačnog rešenja.

28.5 U jednom ekosistemu živi 1500 ptica određene vrste. Uzorkovano je 20 od tih ptica i kod 5 je nađen određeni gen. Od 1500, koliko ptica treba da ima ovaj gen da bi očekivani broj u uzorku bio 5? (Ova vrsta ocene se zove *ocena metodom momenata*)

Rešenje Ako je n ptica nosilac tog gena, očekivani broj je onda

$$\frac{n}{1500} \cdot 20.$$

Kada ovo izjednačimo sa 5 dobijamo rešenje

$$\hat{n} = 5(1500)/20 = \boxed{375}.$$

29.1 Neka su $(W_1, W_2, W_3, W_4) \sim \text{Multinom}(10, 0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$. Koliko je

$$\mathbb{P}((W_1, W_2, W_3, W_4) = (1, 3, 2, 4))?$$

Rešenje Ovo je slično situaciji kada postoji četiri odgovora na pitanje i deset osoba je anketirano. Iz naše formule:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((W_1, W_2, W_3, W_4) = (1, 3, 2, 4)) &= \binom{10}{1, 3, 2, 4}(0.3)^1(0.2)^3(0.4)^2(0.1)^4 \\
&= \frac{10!}{1!3!2!4!}(0.3)^1(0.2)^3(0.4)^2(0.1)^4 \\
&= \boxed{0.0004838\ldots}.
\end{aligned}$$

29.3 Pretpostavimo $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{Multinom}(30, 0.5, 0.1, 0.4)$.

a) Koja je raspodela za X_1?

b) Koliko je $\mathbb{E}[X_1]$?

c) Naći $\text{Cov}(X_1, X_3)$.

Rešenje

a) Marginalne raspodele od multinomne su binomne tako da je $\boxed{X_1 \sim \text{Bin}(30, 0.5)}$.

b) Očekivanje binomne raspodele je jednako broju eksperimenata puta verovatnoća uspeha u svakom eksperimentu, dakle: $30 \cdot 0.5 = \boxed{15}$.

c) Kovarijansa između marginalnih multinomne je negativna vrednost broja eksperimenata puta verovatnoće uključenih marginalnih. U ovom slučaju, $30 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = \boxed{6}$.

29.5 Predmet istraživanja je jedna životinjska populacija. Uzeto je 30 životinja. Svaka životinja ima 10% šanse da je genotipa A, 20% šanse da je genotipa B i 70% šanse da je genotipa C. Neka je (N_A, N_B, N_C) broj životinja svakog od tri genotipa.

a) Koja raspodelu ima (N_A, N_B, N_C)?

b) Naći $\mathbb{E}(N_A)$.

c) Kolika je $\text{Cov}(N_A, N_B)$?

d) Kolika je $\text{Cov}(N_A, N_C)$?

Rešenje

a) Raspodela će biti multinomna:

$$\boxed{\mathsf{Multinom}(30, 0.1, 0.2, 0.7)}.$$

b) Očekivanje je verovatnoća odabira tog tipa puta veličina uzorka

$$\mathbb{E}[N_A] = 0.1(30) = \boxed{3}.$$

c) Kovarijansa je proizvod verovatnoća i veličine uzorka, sa negativnim znakom

$$\mathrm{Cov}(N_A, N_B) = -30 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = \boxed{-0.6000}.$$

d) Slično tome

$$\mathrm{Cov}(N_A, N_C) = -30 \cdot 0.1 \cdot 0.7 = \boxed{-2.1000}.$$

30.1 Neka su Z_1, Z_2, Z_3 iid normalne.

a) Koju raspodelu ima $Z_1 + Z_2 + Z_3$?

b) Koju raspodelu ima $5 - Z_1 + 2Z_2 + 4Z_3$?

Rešenje Zapamtite da će svaka linearna kombinacija iid normalnih biti iz familije normalnih raspodela. Samo uskladite očekivanje i varijansu.

a) To je $\boxed{\mathsf{N}(0, 3)}$.

b) To je $\boxed{\mathsf{N}(5, 21)}$.

30.3 Za Z_1, Z_2, Z_3 iid normalne neka su

$$\begin{aligned} W_1 &= Z_1 + Z_2 - 2Z_3 \\ W_2 &= -Z_1 + Z_3 \\ W_3 &= Z_3. \end{aligned}$$

a) Naći $\mathrm{Cov}(W_1, W_3)$.

b) Koju raspodelu ima(W_1, W_2, W_3)?

Rešenje

a) Ovde je

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(W_1, W_3) &= \mathrm{Cov}(Z_1 + Z_2 - 2Z_3, Z_3) \\ &= \mathrm{Cov}(2Z_e, Z_3) \\ &= 2\mathbb{V}(Z_3) = \boxed{2}. \end{aligned}$$

b) Pošto je $W = AZ$, W ima multivarijantnu normalnu tj. multinormalnu raspodelu. Da bi našli parametre uzmimo

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Očekivanje je 0 vektor tako da

$$\boxed{\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} \sim \text{Multinorm}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}$$

30.5 Neka je (X_1, X_2, X_3) multinormalni vektor sa očekivanjem $(2.3, 1.8, -1.6)$ i matricom kovarijanse

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 2.3 \\ 0 & 2.4 & 1.6 \\ 2.3 & 1.6 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

a) Koju raspodelu ima X_1?

b) Naći $\text{Cov}(X_1, X_3)$.

Rešenje

a) Ovo je $\boxed{\text{N}(2.3, 1.1)}$.

b) Ovo je $\boxed{2.300}$.

31.1 Neka su X_1, X_2, X_3 iid sa gustinom $f(s) = s/2 \cdot \mathbb{1}(s \in [0, 2])$.

a) Koja je gustina od $X_{(1)}$?

b) Izračunaj $\mathbb{E}[X_{(2)}]$?

Rešenje

a) Gustina za $X_{(1)}$ je (iz formule za statistike poretka):

$$f_{X_{(1)}}(s) = 3\binom{2}{0} f(s)F(s)^0(1 - F(s))^{3-1}.$$

Cdf za X_1 je za $s \in [0, 2]$:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(s)\, ds = \int_0^a s/2\, ds = a^2/4.$$

Kada je $a > 2$, onda je $F(a) = 1$, i za $a < 0$, $F(a) = 0$. Dakle

$$f_{X_{(1)}}(s) = 3(s/2) \cdot \mathbb{1}(s \in [0, 2])(1 - s^2/4)^2 = \boxed{(3/2)s(1 - s^2/4)^2 \cdot \mathbb{1}(s \in [0, 2])}.$$

b) Da bi našli $\mathbb{E}[X_{(2)}]$, treba nam gustina. Ponovo koristimo formulu za statistike poretka:

$$f_{X(2)}(s) = 3\binom{2}{1} f(s)F(s)^1(1 - F(s))^{3-2} = 3s(s^2/4)(1 - s^2/4) \cdot \mathbb{1}(s \in [0, 2]).$$

Odavde dobijamo očekivanje

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{(2)}] &= \int_{\mathbb{R}} s f_{X(2)}(s)\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} s \cdot (3s^3/4)(1-s^2/4)\mathbb{1}(s \in [0,2])\, ds \\ &= \int_0^2 (3s^4/4)(1-s^2/2)\, ds \\ &= 48/35 \approx \boxed{1.371}.\end{aligned}$$

31.3 Dato je $\mathbb{P}(X=0)=0.3$, $\mathbb{P}(X=1)=0.5$, i $\mathbb{P}(X=2)=0.2$. Neka su X_1, X_2, X_3 iid sa istom raspodelom kao X.

a) Koja je raspodela od $X_{(1)}$?

b) Naći $\mathbb{E}[X_{(2)}]$?

Rešenje

a) Pošto X nije neprekidna, ne možemo koristiti formulu za gustine statistika poretka. Ono što možemo da uradimo je ideja koju smo koristili za minimum ranije tokom kursa:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{(1)} \geq 0) &= 1^3 \\ \mathbb{P}(X_{(1)} \geq 1) &= 0.7^3 \\ \mathbb{P}(X_{(1)} \geq 2) &= 0.2^3,\end{aligned}$$

što vodi ka

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{(1)}=0)=0.6570,\ \mathbb{P}(X_{(1)}=1)=0.3350,\ \mathbb{P}(X_{(1)}=2)=0.008000.}$$

b) Da biste pronašli očekivanu vrednost $X_{(2)}$, potrebno je pronaći njegovu raspodelu. Ovaj broj je 0 ako su najmanje dva od X_1, X_2, X_3 jednaka 0, i 2 je, ako su najmanje dva od X_1, X_2, X_3 jednaka dva. Činjenica da je ili 0, 1 ili 2 onda omogućava izračunavanje preostalog dela raspodele:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{(2)}=0) &= \binom{3}{2} 0.3^2 0.7 + 0.3^3 = 0.216 \\ \mathbb{P}(X_{(2)}=3) &= \binom{3}{2} s0.2^2 0.8 + 0.2^3 = 0.104.\end{aligned}$$

Otuda je

$$\mathbb{E}[X_{(2)}] = 0.216(0) + 0.68(1) + 0.104(2) = \boxed{0.8880}.$$

31.5 Kolika je šansa da za tri iid uniformne na intervalu $[0,1]$, srednji od tri broja pada u interval $[1/3, 2/3]$?

Rešenje Pošto su slučajne promenljive uniformne, sredina tri broja (druga statistika poretka) će imati beta raspodela sa parametrima 1 i 1:

$$\begin{aligned} f_{U_{(2)}}(s) &= \frac{s(1-s)}{B(2,2)} \cdot \mathbb{1}(s \in [0,1]) \\ &= s(1-s)\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1)\Gamma(1)}\mathbb{1}(s \in [0,1]) \\ &= 3!s(1-s) \cdot \mathbb{1}(s \in [0,1]). \end{aligned}$$

Dakle, da bi pronašli verovatnoću da ovo pada u $[1/3, 2/3]$, samo integralimo po ovom intervalu:

$$\mathbb{P}(U_{(2)} \in [1/3, 2/3]) = \int_{[1/3,2/3]} \mathbb{P}(U_{(2)} \in du) = \int_{1/3}^{2/3} 6u(1-u)\, du = \frac{13}{27} \approx \boxed{0.4814}.$$

32.1 Uzmimo $\Omega_1 = [0,1]$ i $\Omega_2 = \{1,2,3\}$. Neka je funkcija $Y : \Omega_1 \to \Omega_2$ definisana sa

$$Y(y) = 1 + \mathbb{1}(y \in [0.4, 0.6]) + \mathbb{1}(y \in [0.5, 0.7]).$$

Naći $Y^{-1}(\{2\})$.

Rešenje Pitanje traži koje ulazno y u funkciju Y daje izlazni rezultat 2. Kako je funkcija napisana preko indikatora, ovo se dešava kada važi tačno jedan od uslova $y \in [0.4, 0.6]$ i $y \in [0.5, 0.7]$. Što je tačno

$$\boxed{y \in [0.4, 0.5) \cup (0.6, 0.7]}.$$

32.3 Uzmimo $\Omega_1 = [0,1]$, $\Omega_2 = \{1,2,3\}$, i

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

Za $Y : \Omega_1 \to \Omega_2$, neka je

$$Y(y) = 1 + \mathbb{1}(y \in [0.4, 0.6]) + \mathbb{1}(y \in [0.5, 0.7]).$$

Koje skupove mora da sadrži $\mathcal{F}_1$ (sigma algebra nad Ω_1) da bi Y bila merljiva funkcija?

Rešenje Pogledajmo inverzne slike skupova u $\mathcal{F}_2$.

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\emptyset) &= S_0 = \emptyset \\ Y^{-1}(\{1\}) &= S_1 = [0, 0.4) \cup (0.7, 1] \\ Y^{-1}(\{2\}) &= S_2 = [0.4, 0.5) \cup (0.6, 0.7] \\ Y^{-1}(\{3\}) &= S_3 = [0.5, 0.6] \\ Y^{-1}(\{1,2\}) &= S_4 = [0, 0.5) \cup (0.6, 1] \\ Y^{-1}(\{1,3\}) &= S_5 = [0, 0.4) \cup [0.5, 0.6] \cup (0.7.1] \\ Y^{-1}(\{2,3\}) &= S_6 = [0.4, 0.7] \\ Y^{-1}(\{1,2,3\}) &= S_7 = [0,1] \end{aligned}$$

Znači merljivi skupovi moraju sadržati svih ovih osam mogućnosti.

$$\mathcal{F}_1 = \boxed{\{S_0, \ldots, S_7\}}.$$

32.5 Nastavljajući sa Y od ranije, ako je $\mathbb{P}_1$ nad Ω_1 uniformna, koliko je $\mathbb{P}(Y \leq 2)$?

Rešenje

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq 2) &= \mathbb{P}_1(Y^{-1}(\{1, 2\})) \\ &= \mathbb{P}_1([0, 0.5) \cup (0.6, 1]) \\ &= \boxed{0.9000}. \end{aligned}$$

42.1 Dokazati $(\exists x)(2x + 3 \geq 10)$.

Rešenje

Dokaz. Uzmimo $x = 4$. Onda je $2x + 3 = 11 \geq 10$. □

42.3 Dokazati $(\forall x)(\exists y)(xy \leq 0)$

Rešenje .

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Neka je $y = -|x|$. Pretpostavimo da je $x \geq 0$, onda $y \leq 0$ tako da je $xy \leq 0$. Ako je $x \leq 0$, onda je $y \geq 0$, i tako $xy \leq 0$. U svakom slučaju $xy \leq 0$. □

42.5 Dokazati da ako je $x > 3$ onda $2x > 6$.

Rešenje

Dokaz. Neka je $x > 3$. Množenje sa 2 daje $2x > 6$. □

43.1 Kolika je mera prebrojavanja skupa $\{1, 2, \ldots, 10\}$?

Rešenje Kako u skupu ima deset elemenata, $\boxed{10}$.

43.3
a) Šta je $\{r, g, b\} \cap \{g, b, y\}$?
b) Šta je $\{r, g, b\} \cup \{g, b, y\}$?

Rešenje

a) Presek ovih skupova se sastoji od elemenata koji su oba skupa, dakle $\boxed{\{g, b\}}$.
b) Unija ovih skupova sastoji se od elemenata su u bar jednom od njih, dakle $\boxed{\{r, g, b, y\}}$.

43.5 Kolika je mera prebrojavanja od $\{r, g, b\}$?

Rešenje Kako ima tri elementa u skupu, $\boxed{\#(\{r, g, b\}) = 3}$.

43.7 Kolika je mera prebrojavanja od $\{1,3,5\} \times \{7,9\}$?

Rešenje Mera prebrojavanja je proizvod pojedinačnih mera, tako da je $3 \cdot 2 = \boxed{6}$.

43.9 Neka je $A = \{r, g, b\}$. Kolika je mera prebrojavanja od $A \times A \times A \times A$?

Rešenje Koristeći multiplikativnu osobinu mera prebrojavanja za direktan proizvod, ovo je jednako

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \boxed{81}.$$

43.11

a) Kolika je Lebegova mera od $[2, 10]$?

b) Kolika je Lebegova mera od $[-6, 2]$?

Rešenje

a) Ovo je dužina intervala $10 - 2 = \boxed{8}$.

b) Ovo je dužina intervala $2 - (-6) = \boxed{8}$.

43.13 Kolika je Lebegova mera od $[3, 4.5] \times [0, 6]$?

Rešenje Kako prvi skup ima Lebegovu meru $4.5 - 3 = 1.5$ a drugi ima Lebegovu meru (dužinu) $6 - 0 = 6$, Dekartov proizvod ima Lebegovu meru (površinu) jednaku $(6)(1.5) = \boxed{9}$.

43.15 *De Morganovi zakoni* kažu da je

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

Pretpostavimo da ovaj zakon važi za dva skupa i onda dokažimo da

$$(A \cup B \cup C)^C = A^C \cap B^C \cap C^C.$$

Rešenje Neka je $R = A \cup B$. Onda

$$(A \cup B \cup C)^C = (R \cup C)^C = R^C \cap C^C$$

prema De Morganovom zakonu za dva skupa. Po istom zakonu je $R^C = A^C \cap B^C$. Sve ovo zajedno daje

$$(A \cup B \cup C)^C = A^C \cap B^C \cap C^C$$

što smo i želeli.

44.1 Za datu funkciju $f : \{a, b, c\} \to \{b, c, d\}$ odgovoriti na sledeće.

a) Koji su mogući ulazi za f?

b) Koji su mogući izlazi za f?

Rešenje

a) Mogući ulazi su $\boxed{\{a, b, c\}}$.

b) Mogući izlazi su $\boxed{\{b, c, d\}}$.

44.3 Neka je $g(a) = b$, $g(b) = b$ i $g(c) = d$. Da li je g $1-1$?

Rešenje Funkcija $\boxed{\text{nije } 1-1}$ jer postoje dve ulazne vrednosti koje daju isti izlaz.

44.5 Razmotrimo funkciju $f(x) = x^2$.

a) Recimo $f : [0,1] \to [0,1]$. Da li je f *na*? Da li je $1-1$?
b) Recimo $f : [-1,1] \to [0,1]$. Da li je f *na*? Da li je $1-1$?
c) Recimo $f : [-1,1] \to [0,2]$. Da li je f *na*? Da li je $1-1$?

Rešenje

a) Neka je $y \in [0,1]$. Onda je $\sqrt{y} \in [0,1]$ i $f(\sqrt{y}) = y$, tako da je f *na*. Ako je $a^2 = b^2$ onda je $|a| = |b|$ pošto je $\sqrt{a^2} = |a|$. Tako da za a i b oba u $[0,1]$, $a = b$, i f je $1-1$.
b) Ako je funkcija već bila *na*, povećavanjem domena to i ostaje. Međutim, sada je $f(-1/2) = f(1/2) = 1/4$, što pokazuje (kontraprimerom) da funkcija f nije više $1-1$.
c) Ako je $f(a) = 2$, onda je $a^2 = 2$, tako da $|a| = \sqrt{2}$ i $a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, od kojih nijedno nije u $[-1,1]$. Dakle f nije više *na*. Primer $f(-1/2) = f(1/2) = 1/4$ se opet može koristiti da se pokaže da funkcija nije $1-1$.

45.1 Izračunajte sledeće integrale:

$$\int_0^3 x^3\,dx, \quad \int_{-\infty}^0 x\exp(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\exp(-x^2/2)\,dx.$$

(Napomena, nakon što ste rešili probleme poput ovih, ohrabrujem vas da koristite alate kao što je Wolfram Alpha da *proverite* svoje odgovore. Na primer, unesite

```
integrate x^3 from 0 to 3
```

na sajtu www.wolframalpha.com da proverite svoje rešenje prvog integrala.)

Rešenje Primitivna funkcija od x^3 je $x^4/4$, i korišćenje osnovne teoreme iz analize daje

$$\int_0^3 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^3 = \frac{81}{4} = \boxed{20.25}.$$

Za sledeći integral je potrebna parcijalna integracija. Prisetimo se:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Postavljanje $f(x) = x$ i $g'(x) = \exp(x)$ daje $f'(x) = 1$ i $g(x) = \exp(x)$, tako da

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 x\exp(x)\,dx &= x\exp(x)|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \exp(x)\,dx \\ &= x\exp(x)|_{-\infty}^0 - \exp(x)|_{-\infty}^0.\end{aligned}$$

Obratite pažnju da ne možete jednostavno ubaciti minus beskonačno, već morate uzeti limes kako funkcija ide ka minus beskonačnom.

Takođe, zapamtite da polinomi poput x rastu mnogo sporije od eksponencijalnih funkcija, i $x\exp(-x)$ je samo

$$\frac{x}{\exp(x)}.$$

Dakle, brojilac raste polinomijalno, dok imenilac raste eksponencijalno, pa je ovaj limes jednak 0. Generalno, pravilo je

$$\text{logaritmi} \ll \text{polinomi} \ll \text{eksponencijalne} \ll \text{faktorijeli}.$$

Još jedan način za rešavanje problema poput ovog je primena Lopitalovog pravila: Pretpostavimo $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ i da je limes 0 ili beskonačno. Lopitalovo pravilo onda kaže da ako $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ postoji i konačan je, onda je $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$.

Sada je $x\exp(x) = x/\exp(-x)$, izvod od x je 1, a izvod od $\exp(-x)$ je $-\exp(-x)$, tako da

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\exp(-x)} = 0,$$

što znači da je i $\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$. Dakle

$$\int_{-\infty}^{0} x\exp(x)\,dx = x\exp(x)|_{-\infty}^{0} - \exp(x)|_{-\infty}^{0} = 0 - 0 - (1-0) = \boxed{-1}.$$

Treći integral zahteva smenu. Setimo se da

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} g(y)\,dy.$$

U ovom slučaju, $g(x) = -x^2/2$ i $g'(x) = -x$. Sada, $-x$ se ne podudara baš sa x u integralu, ali samo pomnožite i podelite sa -1 da biste ga doveli u odgovarajući oblik:

$$\begin{aligned}\int_a^b x\exp(-x^2/2)\,dx &= \int_a^b \frac{-x\exp(-x^2/2)}{-1}\,dx\\ &= \int_{-a^2/2}^{-b^2/2} \frac{\exp(y)}{-1}\,dy = -\exp(y)|_{-a^2/2}^{-b^2/2}.\end{aligned}$$

Dakle

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\exp(-x^2/2)]dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty} -\exp(-b^2/2) + \exp(-a^2/2) = \boxed{0}.$$

45.3 Naći

$$\int_1^2 x\ln(x)\,dx$$

pomerajući izvod od $x = [x^2/2]'$ uz $\ln(x)$ da bismo ga se otarasili.

Rešenje Parcijalna integracija nam daje

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)\,dx &= \int_{-1}^1 [x^2/2]'\ln(x)\,dx\\ &= \int_1^2 -(x^2/2)[\ln(x)]' + [x^2\ln(x)/2]'\,dx\\ &= \int_1^2 -(x^2/2)(1/x) + [x^2\ln(x)/2]'\,dx\\ &= \int_1^2 -x/2 + [x^2\ln(x)/2]'\,dx\\ &= \int_1^2 -[x^2/4]' + [x^2\ln(x)/2]'\,dx\\ &= x^2[\ln(x)/2-(1/4)]_1^2\\ &= 4[\ln(2)/2-(1/4)]-(1)[0-(1/4)] = 2\ln(2)-3/4 \approx \boxed{0.6362}.\end{aligned}$$

Možemo da proverimo naš rezultat koristeći `integrate x*ln(x) from 1 to 2` u Wolfram Alpha.

45.5 Pretpostavimo da je

$$I = \int_0^\infty \int_0^x |f(x,y)|\,dy\,dx < \infty$$

tako da se može primeniti Fubini. Zamenite znakove pitanja sa odgovarajućom funkcijom od y.

$$I = \int_0^\infty \int_?^? f(x,y)\,dx\,dy.$$

Rešenje U integralu I x ide od 0 do ∞, dok y ide od 0 do x. Napisaćemo to kao nejednakost

$$0 \le y \le x.$$

Sa stanovišta x, ovo znači $x \ge y$. Nema gornje granice za x, pa zamena znakova pitanja sa funkcijama y daje:

$$I = \boxed{\int_0^\infty \int_x^\infty f(x)\,dx\,dy.}$$

Primetite da je ∞ konstanta kao funkcija od y.

Indeks